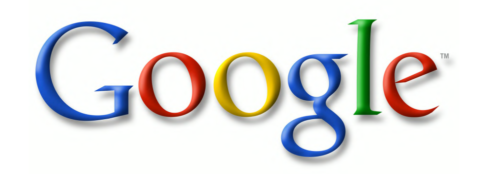



QB362
K96

Herrn Prof. Dr. Kronecker, seinem hochverehrten Lehrer, in tiefster Dankbarkeit

Der Verfasser

ZUR
GESCHICHTE DES MATHEMATISCHEN DREIKÖRPERPROBLEMES.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG

DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE,

WELCHE MIT

GENEHMIGUNG DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

AM SONNABEND, DEN 1. AUGUST 1891

MITTAGS 12 UHR

ZUGLEICH MIT DEN ANGEHÄNGTEN THESEN

ÖFFENTLICH VERTEIDIGEN WIRD

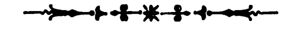
ERNST KULLRICH

AUS BERLIN.

OPPONENTEN:

HERR CAND. MATH. **R. SCHROEDER.**

„ DR. MED. **F. MEIER-SONNTAG.**



HALLE A. S.
HOFBUCHDRUCKEREI von C. A. KAEMMERER & CO.
1891.



Seiner Mutter

in Dankbarkeit.

Der Verfasser.





Über die Geschichte des Dreikörperproblemes existiert, soweit Verfasser ermitteln konnte, nur eine ältere Monographie (von Gautier 1817*); was sich in Werken über die Geschichte der Mathematik und Astronomie und anderswo findet, ist kurz oder mehr gelegentlich bemerkt.

Bei der Reichhaltigkeit des Materials über das Dreikörperproblem will Verfasser durch die folgende Arbeit keineswegs die hier angedeutete Lücke ausfüllen; es sollen vielmehr nur nach Festlegung des Begriffs des mathematischen Dreikörperproblems die bisher hierfür erzielten Resultate nach sachlichen Gesichtspunkten zusammengestellt werden.

Abschnitt I enthält einleitende Bemerkungen und die Disposition der folgenden Abschnitte II bis VII.

---

*) Essai Historique sur le problème des trois corps ou dissertation sur la théorie des mouvemens de la lune et des plamètes, abstraction faite de leur figure.



I.

Unter dem „mathematischen Dreikörperproblem“ soll die Aufgabe verstanden werden: für jede beliebige Zeit die Bewegung dreier freier Massenpunkte zu bestimmen, welche sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, falls man Lage, Masse und Geschwindigkeit der drei Massenpunkte in einem bestimmten Zeitmomente kennt*). Hierzu seien drei Bemerkungen gemacht:

1) Der mathematischen Aufgabe des Dreikörperproblems steht das „astronomische Dreikörperproblem“ gegenüber. Dieses zerfällt in eine grosse Reihe von Aufgaben, nämlich alle die Specialfälle des mathematischen Dreikörperproblems, welche durch verschiedene Gruppen von je drei Himmelskörpern (wie Sonne, Erde und Mond; Sonne, Jupiter und Erde u. s. w.) gebildet werden, indem man den Einfluss der anderen Himmelskörper nicht beachtet. Alle diese Aufgaben**) sind für das mathematische Dreikörperproblem eben nur Specialfälle, gerade so gut wie die in der Wirk-

*) vgl. Lagrange, Essai. Paris Rec. IX. 1772 No. 9. Oeuv. VI. 1873. p. 229. — Hesse „Über das Problem der drei Körper“ Münchener Abh. XI. I. 1873,53; Journal für Math. 74. Berlin 1872, p. 97. — Kirchhof Math. Phys. Mechanik §. 8. —

**) Die mathematische Zusammenfassung derselben ergiebt den Fall, dass die drei Massen $1-\mu$, μ, 0 sind (μ sehr klein). vgl. Poincaré Acta Math. Bd. XIII. p. 120. —

lichkeit nicht beobachteten Specialfälle eines Euler*), Lagrange**), Laplace***), Liouville†) u. s. w. Nur in ihren negativen Resultaten, d. h. den Schlüssen, welche Mittel und Wege nicht zur Lösung führen, können die Behandlungen von Specialfällen auch für das allgemeine Problem von Nutzen sein††).

Von direktestem Nutzen ist dagegen für das mathematische Dreikörperproblem die Betrachtung der sogenannten „engeren" Dreikörperprobleme. Diese umfassen, ohne irgendwie der Allgemeinheit zu entbehren, nur einen Teil der Aufgabe. Die zwei wichtigsten sind derart, dass nach ihrer Erledigung auch die vollständige Lösung des Problemes der drei Körper gegeben werden könnte. Es sind diese wichtigsten engeren Aufgaben†††), die wir im Abschnitt IV unter dem Gesichtspunkt der Coordinatentransformation näher besprechen werden, die folgenden:

a) Die Bewegung der drei Punkte soll beschrieben werden, wenn man den einen der Punkte, ohne ihn in seiner Bewegung zu beschränken, als ruhend ansieht, d. h. dieser Punkt wird zum Coordinatenanfangspunkt genommen.

b) Die relative Lage der drei Punkte soll bestimmt werden d. h. ihre Abstände.

2) Wollte man das Wort Körper aus dem Namen der Aufgabe beibehalten, so würde dies keine Verallgemeinerung der Aufgabe, sondern das Hinzufügen einer zweiten und ganz neuen Aufgabe: über die Drehungen der einzelnen Körper bedeuten. Eine solche Definition entbehrte nicht nur jedes geschichtlichen Rückhaltes, sondern auch der Zweckmässigkeit.

---

*) Berlin Ac. Abh. 1763. his. 194. —

**) Essai. Cap. II. —

***) Traité de mecan. cél. 1799—1825. F. IV. L. X. Ch. VI. —

†) Journ. de Math. (Liouville). II. 5. I. p. 348. 1856. —

††) vgl. Abschnitt VI. —

†††) vgl. auch p. 40. —

3) Es ist wiederholentlich das Dreikörperproblem auch für ein anderes Anziehungsgesetz als das Newton'sche untersucht worden. Das allgemeinste Dreikörperproblem wäre das bei einem beliebigen Anziehungsgesetze. Diese Definition ist nicht üblich und würde für die folgenden Betrachtungen den ganzen Gesichtspunkt völlig verschieben; wir halten daher hier fest an dem Newton'schen Anziehungsgesetz. —

Nach diesen Bemerkungen zu unserer Definition möge kurz einiges Historische über die ersten Behandlungen des Dreikörperproblems überhaupt und insbesondere des mathematischen angeführt werden.

Die Geschichte des Dreikörperproblems beginnt mit der Aufstellung des Newton'schen Anziehungsgesetzes.

Hatte Newton sein Weltgesetz ausgehend von den Erfahrungssätzen Kepler's über die Bewegung der Planeten gefunden, so musste ihm daran liegen, den Einklang seiner Theorie auch mit der beobachteten Bewegung der Trabanten, namentlich des Mondes nachzuweisen. Dies führte ihn schon im ersten Buche der „mathematischen Principien" auf die theoretische Untersuchung der Bewegungen des speciellen Systemes dreier Körper: Sonne, Erde und Mond.

Im ganzen nächsten Jahrhundert blieb das Interesse der Untersuchung solcher Specialfälle ein überaus reges, wie die zahlreichen Preisaufgaben der Academien und die grosse Menge von Arbeiten bedeutender Mathematiker, besonders eines Clairaut, d'Alembert und Euler*) zeigen.

Ohne näher auf diese Abhandlungen einzugehen, unterscheiden wir hinsichtlich der verschiedenen Methoden: (β und γ vermischen sich freilich in gewisser Weise)

---

*) Eine fast vollständige Zusammenstellung der Litteratur giebt: Bibliographie gén. de l'Astron. par Houzeau et Lancaster T. IIa, IIb. Bruxelles 1882. —

α) Reductionen auf eine angenährte Differentialgleichung zweiter Ordnung und Behandlung derselben; diese Methoden sind höchst ungenau und wurden bald fallen gelassen.

β) Directe Integration der Differentialgleichungen durch Reihen.

γ) Die Methoden, welche von der Variation der Constanten ausgehen, die sich vornehmlich auf die Möglichkeit der Einführung einer Störungsfunction stützen. Hieran knüpfen die modernen astronomischen Methoden an; man erstrebt möglichst convergente Reihen, entwickelt nach verschiedenen Parametern.

Die Resultate der Bemühungen waren immer bessere Annäherungen, wie die Vergleiche mit den in der Wirklichkeit beobachteten Bewegungen bestätigten.

Freilich kümmerte sich die Mehrzahl der Untersuchungen dabei gar nicht um mathematische Strenge. Nur in wenigen Arbeiten, wie besonders in denen Gylden's (vgl. bes. Acta Math. IX), Lindstedt's und der Poincaré's*) (Acta Math. XIII) findet sich eine wahrhaft mathematische Behandlung der zugleich mehr und mehr allgemein gefassten Aufgabe. Von hervorragendster Bedeutung sind Poincaré's negative Resultate**), wie der Nachweis, das Lindstedt's Reihen divergent sind.

Bei der Behandlung der Specialfälle erwachte aber bald auch das theoretische Interesse, das Dreiköperproblem ohne jede Specialisierung der Massen- oder Abstandsverhältnisse zu betrachten. Günstig war hier einmal, dass es Astronomen als eine besondere Gelehrtenklasse noch nicht gab***), dass es vielmehr fast durchweg tüchtige,

---

*) Die in den Astron. Nachr. 102. (1882) von Gylden erwähnten Vorlesungen von Weierstrass waren dem Verfasser nicht zugänglich.

**) Acta Math. XIII.

***) Hätte die mit der Zeit ja so durchaus notwendige Arbeitsteilung die Astronomen früher von den Mathematikern geschieden, so wäre

um die mathematische Wissenschaft verdiente Mathematiker waren, die sich mit unserem Problem beschäftigten, sodann der Umstand, dass nach Aufstellung des d'Alembert'schen Principes die ersten Schritte beim mathematischen Dreikörperproblem nicht mehr Schwierigkeiten boten, als bei den Specialfällen. Die Aufstellung der Differentialgleichungen gelang leicht ganz allgemein. Das Problem der drei Körper wird zu der Aufgabe*) der Auflösung des Differentialgleichungssystemes:

$$\text{I)}\quad m_i \frac{d^2 x_{i\varkappa}}{dt^2} = \frac{\delta U}{\delta x_{i\varkappa}}\,;\ i,\ \varkappa = 1, 2, 3.$$

$$U = \mathrm{T}_i\, m : \Sigma_h \frac{1}{m_h r_h}\,;\ r_h = \sqrt{\Sigma_\varkappa (x_{\lambda\varkappa} - x_{\mu\varkappa})^2}\,;\ i,\ h,\ \varkappa = 1,\ 2,\ 3.\quad \mu \equiv \lambda + 1 \equiv h + 2 \ (\mathrm{mod}\ 3).$$

Wir knüpfen hieran gleich drei rein formale Umgestaltungen des Systemes I:

1) Die zweite Form der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen:

$$\text{II)}\quad \frac{d\,\dfrac{\delta T}{\delta q'_i}}{dt} - \frac{\delta\,(T + U)}{\delta q_i} = 0;\ i = 1, 2 \ldots . 9$$

$$q'_i = \frac{dq_i}{dt}\,;\quad T = \frac{1}{2} \sum_{i,\varkappa} m_i \left[\frac{(dx_{i\varkappa})^2}{da}\right],$$

wenn man in der eckigen Klammer die $x_{i\varkappa}$ durch die q_i ersetzt. Dabei ist: $x_{i\varkappa} = \varphi_{i\varkappa}\,(q_1\ q_2 \cdots q_9)$.

---

es weit schwerer gewesen, vom astronomischen Dreikörperproblem auf das mathematische zu kommen. Beschäftigen sich doch jetzt die Astronomen nur noch in seltenen Ausnahmefällen (vgl. Bruns) mit dem mathematischen Problem.

*) Damit fällt die Geschichte unseres Problemes zu einem so grossen Teile mit der Geschichte der Differentialgleichungen zusammen.

2) Die Hamilton'sche sogenannte „kanonische“ Form*) der Differentialgleichungen der Bewegung:

III) $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\delta H}{\delta p_i}\,;\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta q_i}$, wo $H = T - U$ ist, und für die q'_i die p_i eingeführt sind durch: $p_i = \frac{\delta T}{\delta q'_i}$.

3) Die Umgestaltung von 1) in ein System von 18 linearen Gleichungen, die man als fortlaufende Proportion schreiben kann:

IV) $dx : dx_1 : \cdots\ dx_{18} = H : H_1 : \cdots : H_{18}\,;$

wo: $x = t$ und:

$$\left.\begin{aligned} x_{(i-1)3+\varkappa} &= x_{i\varkappa}\,; & \frac{dx_{(i-1)3+\varkappa}}{dt} &= \frac{dx_{i\varkappa}}{dt} \\ x_{(i+2)3+\varkappa} &= \frac{dx_{i\varkappa}}{dt}\,; & \frac{dx_{(i+2)3+\varkappa}}{dt} &= \frac{d^2x_{i\varkappa}}{dt^2} \end{aligned}\right\} i,\varkappa = 1, 2, 3.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{H_{(i+2).3+\varkappa}}{H} &= \frac{dx_{(i+2)3+\varkappa}}{dt} = \frac{1}{m_i} \cdot \frac{\delta U}{\delta x_{i\varkappa}} \\ \frac{H_{(i-1)3+\varkappa}}{H} &= \frac{dx_{(i-1)3+\varkappa}}{dt} = H_{(i+2).3+\varkappa} \end{aligned}\right\} i,\varkappa = 1, 2, 3.$$

Auch III, lässt sich sofort in Form einer solchen fortlaufenden Proportion schreiben. —

Die analytische Behandlung eines dieser grundlegenden Systeme nach Analogie der oben durchgemusterten Methoden für das astronomische Dreikörperproblem ist teils unbequem, teils unmöglich**). Es mussten daher für die weitere Förderung des mathematischen Dreikörperproblems neue Methoden gefunden werden. Abgesehen von der Lösung Dirichlet's (vgl. Abschnitt VIII.) haben diese indessen nur zu Reductionen der Aufgabe, nicht zu einer Lösung geführt.

---

*) Jacobi: Nova Methodus §. 57.

**) vgl. über den Begriff Störung Ab. VII.

Die Reductionen unseres Problems bestehen entweder darin, dass wir nach Auffindung einiger Integralgleichungen*) für das Differentialgleichungssystem nur noch weniger solche Integralgleichungen zu finden haben, um die vollständige Lösung, die an Integralen 9 endliche Gleichungen, oder 18 Differentialgleichungen erfordert, zu besitzen. Ferner wird die Aufgabe reduciert, indem Theoreme über die Ableitung neuer Integrale aus bekannten oder als bekannt vorausgesetzten hergeleitet werden. Es wird dann die Aufgabe zurückgeführt auf die Integration eines einfacheren Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen und auf die von zwei respective einer partiellen Differentialgleichung. Endlich sind einige höchst wichtige negative Resultate über die Natur der Lösung unserer Aufgabe erzielt worden.

Ob dabei solche zunächst zum teil äusserlichen Reductionen auch wirkliche Vereinfachungen der Aufgabe bedeuten, ist freilich nichts weniger als selbstverständlich. Solange man indessen den zum mindesten formalen Retuctionen nicht im Gegenteil nachweisen kann, dass sie durchaus nichts zur Vereinfachung der Aufgabe beizutragen imstande sind, haben sie zweifellos ihre Bedeutung in der Geschichte der Aufgabe. Das Nähere hierüber wird sich im folgenden bei der Einzelbesprechung ergeben. —

Wir behandeln aber bei dieser den Stoff in folgenden fünf Abschnitten:

1) Durch Combination der Differentialgleichungen erzielte integrable Gleichungen ergeben gewisse Integrale. (II.) p. 14—20.

2) Es werden Sätze aufgestellt, wie man aus anderen als bekannt vorausgesetzten Integralen neue herleiten kann. (III.) p. 21—34.

---

*) D. h. Differentialgleichungen erster Ordnung oder endliche Gleichungen zwischen den Coordinaten und t. Ohne Bruns Unterschied der „Integrale“ und „Integralgleichungen“ (Leipz. Ber. 1887 p. 2) anzunehmen, brauchen wir beide Ausdrücke als gleichbedeutend. —

3) Das Differentialgleichungssystem wird durch ein anderes System gewöhnlicher Differentialgleichungen ersetzt, welches weniger Integrationen erfordert. (IV.)

4) Die Aufgabe wird auf die Integration zweier resp. einer partiellen Differentialgleichung zurückgeführt. (V.)

5) Es wird die Unmöglichkeit gewisser Arten von Lösungen dargethan. (VI.)

Abschnitt VII enthält dann Bemerkungen über die der Wissenschaft verloren gegangene Lösung Dirichlet's und einige Consequenzen unserer Erörterungen.

Zum Schluss folgt ein Verzeichnis der Arbeiten über das mathematische Dreikörperproblem.

II.

Aus den Differentialgleichungen selbst durch Combination und dann vorgenommene Integration hergeleitete Integrale, seien sie nun erster Ordnung oder endliche Gleichungen, werden durch einen Teil der sogenannten Principien der Mechanik geliefert. Die betreffenden Principien sind:

1) das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts,

2) das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft,

3) das Princip der Erhaltung der Flächenräume.

Clairaut fand diese Integrale bei seinem ersten Versuch über eine allgemeine Lösung des Dreikörperproblems*) bereits vor. Er hat, da er sich auf zwei Dimensionen beschränkt, freilich abweichende Resultate.

*) Réflexions sur le problème des trois corps. Paris 1759. Journ. des Scavans. p. 563. —

Das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts wurde zuerst von Newton abgeleitet*) im Anfang seiner Principia Mathematica philosophiae naturalis**). Das Princip liefert für unser Differentialgleichungssystem I) p. 7 in folgender Weise drei endliche Integralgleichungen. Es werden die drei Summen gebildet:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \frac{d^2 x_{i\varkappa}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\delta U}{\delta x_{i\varkappa}} \;;\; \varkappa = 1, 2, 3.$$

Die Ausrechnung rechts ergiebt, wenn man die $\frac{\delta U}{\delta x_{i\varkappa}}$ durch ihre Werte in $x_{i\varkappa}$ ersetzt, den Wert Null, wie es bei jedem System, wo nur innere Kräfte wirken, sein muss.

Eine zweimalige Integration ergiebt die drei endlichen Gleichungen:

$$\text{A)} \quad \sum_{i=1}^{3} m_i x_{i\varkappa} = a_\varkappa t + b_\varkappa \;;\; \varkappa = 1, 2, 3.$$

Der Name des Princips stützt sich auf die Definition der Coordinaten $\xi_\varkappa$ des Schwerpunktes durch die Gleichungen:

$$M \xi_\varkappa = \sum_{i=1}^{3} m_i x_{i\varkappa} \;;\; \varkappa = 1,2,3 \;;\; M = \sum_{i=1}^{3} m_i \,.$$

Das System A) giebt zur Bestimmung der Coordinaten durch die Zeit drei endliche Gleichungen. Hätte man deren neun, welche zugleich alle von einander unabhängig wären, so wäre es nur noch Sache der Algebra, aus diesen Gleichungen die neun Unbekannten $x_{i\varkappa}$ durch die zehnte t auszudrücken. Eine weitere endliche Gleichung hat man zwischen den $x_{i\varkappa}$ und t indes nicht ermitteln können.

---

*) vgl. für das folgende Lagrange Méc. Anal. II. partie. I Section. —

**) Corrol. IV. der Sectio I. —

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft giebt dagegen eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den $x_{i\varkappa}$ und den t. Dies Princip wurde schon von **Huygens** gefunden *).

Nach Multiplication mit $\frac{dx_{i\varkappa}}{dt} \, . \, dt$ addiert man das gesamte System I) p. 7 und erhält:

$$\sum_{i,\varkappa=1}^{3} m_i \frac{d^2x_{i\varkappa}}{dt^2} \cdot \frac{dx_{i\varkappa}}{dt} \, . \, dt = \sum_{i,\varkappa=1}^{3} \frac{\delta U}{dx_{i\varkappa}} \cdot \frac{dx_{i\varkappa}}{dt} \, dt = dU,$$

und wenn man integriert:

$$\text{B)} \quad \sum_{i\,\varkappa=1}^{3} m_i \, \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dx_{i\varkappa}}{dt}\right)^2 = U + h.$$

Zur Erklärung des Namens führe man ein:

$$\sum_{\varkappa=1}^{3} \left(\frac{dx_{i\varkappa}}{dt}\right)^2 = v_i^2 \quad ; \; v_i \text{ die Geschwindigkeit;}$$

dann wird die linke Seite $\sum_{i=1}^{3} \frac{m_i v_i^2}{2}$ als lebendige Kraft bezeichnet.

Drei weitere Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $x_{i\varkappa}$ und t liefert das dritte der oben angeführten Principien, das der Erhaltung der Flächenräume.

---

*) Clairaut giebt in seiner Arbeit an, seine entsprechende sechste Gleichung selbstständig gefunden zu haben. „Quant à la sixième que je n'ai vûe énoncée nulle part, elle peut se regarder comme une extension du principe des forces vives". Die letzten Worte zeigen dabei, dass er die Beziehung zu unserem Princip nicht verkannt hatte. —

Hier bildet man:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(x_{i\lambda}\frac{d^2x_{i\mu}}{dt^2}-x_{i\mu}\frac{d^2x_{i\lambda}}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}\left(x_{i\lambda}\frac{dx_{i\mu}}{dt}-x_{i\mu}\frac{dx_{i\lambda}}{dt}\right)$$

$$=\sum^{3}\left(\frac{\delta U}{\delta x_{i\mu}}\cdot x_{i\lambda}-\frac{\delta U}{\delta x_{i\lambda}}\cdot x_{i\mu}\right);\ \lambda \gtrless \mu;\ \lambda,\mu = 1, 2, 3.$$

Die letzte Summe ergiebt, wie bei allen freien Systemen, wo nur innere Kräfte wirken, Null, und man hat durch einmalige Integration:

$$C)\quad \sum_{i=1}^{3}\left(x_{i\lambda}\frac{dx_{i\mu}}{dt}-x_{i\mu}\frac{dx_{i\lambda}}{dt}\right)=c_\nu;\quad \begin{array}{l}\lambda,\mu,\nu = 1,2,3\\ \lambda \lessgtr \mu;\ \nu \gtrless \lambda,\mu.\end{array}$$

Diese Gleichungen wurden gleichzeitig von Euler, Daniel Bernoulli und d'Arcy*) gefunden. Ihre geometrische Deutung nach Einführung von Polarcoordinaten hat dem Principe den Namen gegeben.

Es folgt aus den drei Principien, welche für das Dreikörperproblem nutzbar gemacht werden können, dass von den 18 auszuführenden Integrationen 10 geleistet sind**), 8 ausstehen.

Für das erste der oben (p. 8) erwähnten engeren Probleme, wo man $x_{i\varkappa} - x_{i\varkappa} = \xi_{i-1,\varkappa}$ setzt, erfordert die Bestimmung der $\xi_{i\varkappa}$ nur 12 Integrationen. Die Gleichungen des Princips der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts fallen hier als Integrale fort, da sie sich rein in den $\xi_{i\varkappa}$ nicht angeben lassen. Dagegen bleiben auch in den $\xi_{i\varkappa}$ die anderen durch die Principien gelieferten vier Integralgleichungen. Von den 12 bei den $\xi_{i\varkappa}$ zu leistenden Inte-

*) Clairaut nennt nur den letzteren. —

**) Inwiefern die beiden letzten Principien (p. 14) sogar 2 resp. 4 Integrationen zu leisten im stande sind, darüber vgl. Abschnitt IV, p. 40 ff. —

grationen stehen so auch noch 8 aus. Hat man die $\xi_{i\varkappa}$, so erhält man die $x_{i\varkappa}$ durch Benutzung der Gleichungen A); ferner ist: $x_{i+1,\varkappa} = \xi_{i\varkappa} + x_{i\varkappa}$; $i = 1, 2$; daher wäre nach Erledigung der 8 für die $\xi_{i\varkappa}$ ausstehenden Integrationen auch für das vollständige Problem die ganze Arbeit gethan.

Für das zweite, Lagrange'sche, engere Problem, bei dem man die gegenseitigen Abstände der drei Punkte, die r_i, einführt, hat man im Differentialgleichungssystem beim Vergleich mit den Gleichungen in $\xi_{i\varkappa}$ eine weitere Verminderung der Zahl der zu leistenden Integrationen um 2; d. h. es sind 10 Integrationen zu leisten. Aus den allgemeinen Principien (p. 14.) lassen sich zwei Integralgleichungungen in den r_i herleiten, die in Abschnitt IV) näher besprochenen Gleichungen L) und P) des Lagrange. Damit erfordert dann das modificierte System, das wir in Abschnitt IV) angeben werden, auch noch 8 Integrationen.

Ein weiteres und ganz neues Integral hat Lagrange für das von ihm eingeführte engere Problem in Gleichung $N_{,}$ seines Essai gegeben.

Die Gleichung lautet*):

$$\text{N)}\ 16\,(pp' + pp'' + p'p'').\,(vv' + vv'' + v'v'') - 4\,(\Omega v^{**)} + \Omega' v' + \Omega'' v'') + \left(\frac{dp\,dp' + dp\,dp'' + dp'\,dp'' + d\varrho^2}{dt^2}\right)^2 = 0,$$

wo die Grössen p, v und Ω zu bestimmen sind durch***):

*) cf. p. 247 in Lagrange, Oeuvr. T. VI. —

**) Lagrange hat hier $\Sigma_{,}$ $\Sigma'_{,}$ Σ''. —

***) Man erkennt hier deutlich die unsymmetrische Beziehungsweise der Lagrange'schen $r_{,}$ r' r'' im Gegensatz zu den p. 11 symmetrisch eingeführten r_i. —

$$p' + p'' = r^2 = \sum_{\varkappa} \left(x_{2\varkappa} - x_{1\varkappa}\right)^2$$

$$p'' + p = r'^2 = \sum_{\varkappa} \left(x_{3\varkappa} - x_{1\varkappa}\right)^2$$

$$p + p' = r''^2 = \sum_{\varkappa} \left(x_{3\varkappa} - x_{2\varkappa}\right)^2,$$

$$v' + v'' = \frac{d^2(r^2)}{2dt^2} + \left(\frac{m_1 + m_2}{r^3} + \frac{m_3}{r''^3}\right) . r^2 + \frac{m_3}{2}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3}\right)(r^2 + r'^2 - r''^2)$$

$$\Omega = p\left(\frac{2r\,dr}{dt}\right)^2 + p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2 + p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2 - 2\left(p''\frac{dp'}{dt} - p'\frac{dp''}{dt}\right)\frac{d\varrho}{dt} + r^2\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2;$$

für $v + v''$, $v' + v$, Ω', Ω'' gelten ähnliche Gleichungen, $d\varrho$ ist:

$$d\varrho = \sum_{\varkappa=1}^{3} \left(x_{3\varkappa} - x_{1\varkappa}\right) . \left(dx_{2\varkappa} - dx_{1\varkappa}\right) - \sum_{\varkappa=1}^{3} \left(x_{2\varkappa} - x_{1\varkappa}\right) \left(dx_{3\varkappa} - dx_{1\varkappa}\right);$$

die Bestimmungsgleichung in den r ist für ϱ von der zweiten Ordnung.

L a g r a n g e kommt*) auf das Integral N, bei der Untersuchung der Frage, ob die zehn Gleichungen seines Abschnittes VIII) zwischen den von ihm eingeführten neuen Variablen, sowie seinen abkürzenden Zeichen und den ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten nicht von einander abhängig sind. Diese Frage drängt sich auf, da diese zehn Gleichungen zuzammen mit drei weiteren Gleichungen (D) zur Bestimmung von nur 12 Unbekannten dienen. Durch die Combination der zehn besagten Gleichungen findet L a g r a n g e die Gleichung N). Diese muss gleichzeitig neben den drei Fundamentalgleichungen K) für das engere Problem, auf die er das ursprüngliche System I)

---

*) vgl. übrigens Seydler's einleitende Bemerkungen in seiner Abhandlung „Ausdehnung der . . .“ Abh. d. Böhm. Ges. d. W. 1885—6. VII. F. 1 Bd. —

des vollständigen Problems reduciert hat bestehen. „On pourra la regarder comme une intégrale de ces mêmes équations K)."

Während so N) für das engere Problem ein neues Integral darstellt, bedeutet es für das vollständige Problem die Zurückführung einer Integration auf Quadraturen. Man hat (vgl. besonders Abschnitt XIV) und XVI) bei Lagrange) aus den Variablen des engeren Problemes die des vollständigen nach Berechnung gewisser Quadraturen.

Wir haben so bei Zulassung von Quadraturen für das vollständige Problem nur noch sieben Integrationen auszuführen*).

Die Bedeutung von Lagrange's Resultat ist eine um so höhere, als das Integral N) nicht nur das erste gewesen ist, welches speciell für das Dreikörperproblem gefunden worden ist, sondern auch das einzige geblieben ist**).

Wir sind bereits am Ende der für das Dreikörperproblem, von einander unabhängigen Integrale, welche sich direct ableiten lassen.

Dillner***) glaubte zwar bei Zulassung von Quadraturen directe unabhängige neue Integrale gefunden zu haben; indes sind dies keine directen, sondern erst von anderen abhängige Integrale, auf die wir daher erst im folgenden Abschnitt kommen.

Auf die grosse Mannichfaltigkeit abweichender Herleitungen der angeführten Resultate gehen wir nicht ein.

---

*) Unsere Auseinandersetzungen zeigen, dass Lagrange's Integral N) durchaus nicht mit Brun's und Poinkaré's Arbeiten, die wir im Abschnitt VI) besprechen werden, im Widerspruch steht; vgl. übrigens Abschnitt IV). —

**) Direct als Integral für das vollständige Problem sind Lagrange's Betrachtungen mehr zu Abschnitt III) zu rechnen; denn die Quadratur setzt die Erledigung der anderen Integrale voraus. —

***) Mém. sur le probl. des N corps. Nova acta Regiae societ. scient. 1877. Upsala. —

Inwieweit diese Resultate, wenn man sich auf gewisse Formen der Integrale beschränkt, nach den Arbeiten von Bruns und Poincaré bereits die äusserste Grenze des Erreichbaren darstellen, werden wir im Abschnit VI) erörtern.

III.

Bei der Fruchtlosigkeit der Bemühungen, aus den Differentialgleichungen selbst direct weitere Integrale zu erhalten, hat man versucht aus den bekannten Integralen neue, von den alten im Sinne der Algebra unabhängige, herzuleiten. Freilich ist dies bisher nicht gelungen. Indes ist es zum mindesten eine formale Reduction, dass man verschiedene Theoreme aufgefunden hat über die Ableitung neuer Intgrale aus anderen, als bekannt vorausgesetzten, auch wenn man diese hypothetisch zu grunde gelegten Integrale noch gar nicht kennt. Diese Theoreme können zum teil nebeneinander benutzt werden.

Nach Bruns und Poincaré kann man dabei freilich nicht zu weiteren algebraischen resp. eindeutig analytischen Integralen kommen. Sätze, die nur zu solchen Integralen führen könnten, wären also wertlos. Dies ist indes bei den im folgenden zu besprechenden Theoremen, wohl wenn man den bisher bekannten Integralen ausgeht, keineswegs dagegen allgemein der Fall. Da man dies leicht erkennt, machen wir nur vorweg kurz auf diesen Punkt aufmerksam.

Für ein jedes mechanische Differentialgleichungssystem lehrt das Jacobi-Poisson'sche Theorem, neue Integrale aus den bekannten finden.

Nach demselben ergiebt sich allgemein, falls nämlich das neue Integral existiert und nicht identisch Null ist, aus zwei Integralen durch blosse Differentiation, Addition und Multiplication ein neues Integral, d. h. ein solches, welches sich nicht algebraisch durch die beiden ersten ausdrücken

lässt. Im allgemeinen kann der Satz wiederholt angewendet werden, und es ergeben sich so nach und nach alle Integrale. Die bisher gefundenen Integrale des Dreikörperproblems gehören, wie es nach Bruns und Poincaré's negativen Resultaten bei der analytischen Beschaffenheit dieser Integrale nicht anders sein kann zu den Ausnahmefällen.

Das Jacobi-Poisson'sche Theorem besagt für unser Problem: „Kennt*) man zwei von t freie Integrale $\varphi = h_1$ und $\psi = h_2$ des Systemes I, p. 11. und bildet man den Ausdruck:

$$A) \quad (\varphi, \psi) = \sum_{i, \varkappa = 1}^{3} \frac{1}{m_i} \left(\frac{\delta \varphi}{\delta x^1_{i\varkappa}} \cdot \frac{\delta \psi}{\delta x_{i\varkappa}} - \frac{\delta \psi}{\delta x^1_{i\varkappa}} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta x_{i\varkappa}} \right)$$

$$x^1_{i\varkappa} = \frac{dx_{i\varkappa}}{dt};$$

so ist im allgemeinen:

$$(\varphi, \psi) = h_3$$

ein neues Integral ; in besonderen Fällen kann aber auch (φ, ψ) eine Function der Constanten h_1, h_2 und der im Satze der lebendigen Kraft:

$$G - U = h$$

vorkommenden Constanten h oder ein reiner Zahlenwert und dieser gleich Null werden".

Jacobi fand dieses Theorem selbständig **). Er bemerkte aber bald darauf, „dass dieser Satz seit 30 Jahren schon zugleich entdeckt und verborgen war, da man seinen wahren Sinn nicht geahnt, sondern ihn nur bei einem ganz anderen Probleme als Hülfssatz gebraucht hatte". Die erste Entdeckung war durch Poisson geschehen, der an

*) vgl. Clebsch. Jacobi's Vorles. über Dynamik. p. 270; und Crelle Bd. 60 p. 43. —

**) Vorles. p. 269. —

Laplace'sche und Lagrange'sche Untersuchungen über das Störungsproblem angeknüpft hatte.

Poisson*) leitet aus zwei Integralen:

$$a = \text{fonct}\ (\varphi,\ \psi,\ \Theta,\ \varphi',\ \psi'\ \Theta',\ t)$$

b analog

für die Bewegungsgleichungen in der zweiten Lagrange'schen Form:

$$\frac{d\ \frac{\delta T}{\delta \varphi'}}{dt} - \frac{\delta T}{\delta \varphi}{}^{**)} + \frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0$$

analog für ψ und Θ,

das „résultat remarquable" ab:

$$\frac{\delta b}{\delta s} \cdot \frac{\delta a}{\delta \varphi} - \frac{\delta a}{\delta s} \cdot \frac{\delta b}{\delta \varphi} + \frac{\delta b}{\delta \mu} \cdot \frac{\delta a}{\delta \psi} - \frac{\delta a}{\delta \mu}\frac{\delta b}{\delta \psi} + \frac{\delta b}{\delta \nu}\frac{\delta a}{\delta \Theta} - \frac{\delta a}{\delta \nu}\frac{\delta b}{\delta \Theta} = \text{const.}$$

$$s = \frac{\delta T}{\delta \varphi'}\ ;\ \mu = \frac{\delta T}{\delta \psi'}\ ;\ \nu = \frac{\delta T}{\delta \Theta'}\ .$$

Jacobi kommt zu seinem Resultate von der Behandlung partieller Differentialgleichungen aus. Er giebt das Resultat zuerst in dem wohl 1838 verfassten***) Aufsatze: Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis integrandi. Vorher hatte er nur kurze Mitteilungen gemacht. In den Vorlesungen Jacobi's über Dynamik (Wintersemester 1842 (1843) ist der zweite Teil der 34. Vorlesung dem „Satz über das aus zwei gegebenen Integralen der dynamischen Differentialgleichungen herzuleitende dritte" gewidmet. Wir geben kurz die Ableitung des Theorems nach den Entwicklungen in Nova methodus. Es werde das System:

---

*) Sur la variation des Constantes arbitraires dans les questions de Mécanique. Journ. de l'école Polyt. T. VIII. Cah. 15. —

**) Poisson schreibt immer d.

***) vgl. die Anmerk. von Clebsch in „Nova Methodus" Crelle Bd. 60 p. 45. —

B) $dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_9 : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_9$

$$= \frac{\delta f}{\delta q_1} : \frac{\delta f}{\delta p_2} : \ldots : \frac{\delta f}{\delta q_9} : \frac{-\delta f}{\delta p_1} : \ldots : \frac{-\delta f}{\delta p_9}$$

$f = H$

aus III) p. 12 hergeleitet. Haben wir ein Integral φ dieses Systems, so genügt es der Gleichung:

C) $(f, \varphi) = \Sigma \frac{\delta f}{\delta q} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta p} - \frac{\delta f}{\delta p} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta q} = 0$

Es wird dann im Theorema V. die Identität festgestellt in solchen Ausdrücken C):

D) $(F, f) + (\Phi, \varphi) + (\Psi, \psi) = 0,$

wo: $F = (\varphi, \psi)$; $\Phi = (\psi, f)$; $\Psi = (f, \varphi)$ ist.

Sind nun:

$$\varphi = \text{const}; \ \psi = \text{const}$$

zwei Lösungen von B) resp. C), dann sind Ψ und Φ in D) gleich Null und:

$$(F, f) = 0$$

d. h. aber nichts anderes, als:

$$F = (\varphi, \psi) = \text{const}$$

ist ein drittes Integral unserer Gleichungen, wenn anders es keine Identität ist.

Jacobi selbst bemerkt*), dass die letzteren Fälle, „welche in der allgemeinen Theorie als Ausnahmefälle erscheinen, in der Praxis sehr häufig sind". Er behauptet dann: „Damit ein Integral mit irgend einem zweiten combiniert nach und nach alle Integrale liefere, muss es ein solches Integral sein, welches dem besonderen Probleme eigentümlich ist". Diese Beschränkung ist aber eine gewaltige. Beispielsweise zeigt Jacobi selbst in der 35. Vorlesung, dass sein Theorem aus zwei Integralen, welche zu dem durch die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung gelieferten System gehören ein drittes Integral nicht giebt. Auf den positiven Teil seiner Behauptung scheint Jacobi

*) Vorles. über Dyn. p. 269; vgl. Nova Meth. §. 28. Cr. 60 p. 43; ges. Werke IV. p. 145. —

nicht weiter eingegangen zu sein. Er giebt weder eine Definition der „einem Problem eigentümlichen“ Integrale, noch einen Beweis seiner Behauptung. Dagegen erörtert er sein Theorem in der Abhandlung Nova methodus nach verschiedenen Richtungen hin und wendet es im besonderen auch (§ 71) „auf die freie Bewegung von Massenpunkten“ an, ohne neue Resultate zu erzielen.

Von den zahlreichen, sich an die Jacobi'schen Untersuchungen anschliessenden Abhandlungen nennen wir die von Bertrand, Laurent, Bour, Lie. Es werden, vornehmlich an § 37 in Nova methodus anknüpfend, die Ausnahmefälle untersucht, von Bertrand speziell „à l'étude du célèbre problème des trois corps“. Hierauf gehen wir hier nicht ein. Dann werden weitere analoge Theoreme abgeleitet. Dieselben mögen nur kurz erwähnt werden, da sie als eine weitere Reduction neben dem Jacobi-Poisson'schen Satz nicht zu bezeichnen sind. Im besonderen können die durch sie zu erzielenden Integrale nach Lie*) auch durch das Jacobi-Poisson'sche Theorem erhalten werden. Bertrand leitet ein Theorem ab**), welches aus vier bekannten Integralen α, β, γ, δ durch eine gewisse Determinantensumme ein neues Integral oder eine Identität giebt. Laurent***) beweist, dass allgemein 2 k Lösungen eine $(2k + 1)$ te ergeben.

Ein weiterer Satz über die Ableitung eines neuen Integrales aus anderen als schon bekannt vorausgesetzten ist Jacobi's Princip des letzten Multiplicators. Auch hier sind die als bekannt vorausgesetzten Integrale besonderen Bedingungen nicht unterworfen, nur werden nicht zwei Integrale als bekannt vorausgesetzt. sondern alle bis auf eines, und dieses eine liefert dann das Jacobi'sche Princip des letzten Multiplicators.

---

*) Math. Annal. VIII. 1875. p. 215. §. 26. bes. p. 218. —

**) Compt. rend. t. 35. 1852 p. 698. —

***) Journal de Math. II. 5. T. XVII. 1872. p. 422—426. —

Nach Lie muss es freilich, da unser Princip unabhängig ist von der Form unserer Differentialgleichungen, möglich sein, sein Resultat auch durch das Jacobi-Poisson'sche Theorem zu erhalten, wie wir ja unser Princip völlig entbehren könnten, falls wir zwei passende Integrale für das Jacobi-Poisson'sche Theorem hätten, die nach und nach alle Integrale lieferten. Mit Berücksichtigung des Principes des letzten Multiplicators brauchen wir freilich nur noch ein solches Paar von Integralen, dass man aus ihnen alle Integrale bis auf eines durch den Jacobi-Poisson'schen Satz erhält. Auch schien es dem Verfasser angemessen, schon der historischen Bedeutung wegen Jacobi's Prinzip des letzten Multiplicators genauer zu besprechen.

Man erhält dieses Princip durch jenes alte Mittel, mit dem man es fast stets bei der Integration von Differentialgleichungen zu versuchen pflegt, der von Euler geschaffenen Multiplicatorentheorie. Man sucht eine Differentialgleichung mit einem solchen Factor zu multiplicieren, dass sie ein totales Differential wird. Dann lässt sie sich stets einmal integrieren; die Functionen, deren Ableitungen in der Differentialgleichung nun stehen, lassen sich selbst dann zum mindesten durch Quadraturen ermitteln.

Es ist interessant zu sehen, dass schon Euler die Multiplicatorentheorie beim Dreikörperproblem in Anwendung zu bringen suchte *). Doch kommt Euler nur zu dem negativen Resultate, dass sein Multiplicator P nicht eine Funktion nur der einen Variablen p sein könne.

Gewisse Hülfsdienste leisten Multiplicatoren auch Clairaut und d'Alembert und den übrigen Geometern bei der Behandlung der astronomischen Specialfälle des Dreikörperproblems. Indes machen hier die Multipli-

---

*) vergl. die Erörterungen in § 21 und 22, den Considerations sur le Problème des 3 corps. Berlin. Hist. et Mém. de l'Acad. 1763.

catoren nur einen Teil der Gleichung integrabel, nicht die ganze Gleichung.

Ihre Bedeutung, wie für die Integration eines Differentialgleichungssystemes überhaupt, so auch für die Lösung des Dreikörperproblems erhielt die Multiplicatorentheorie erst in Jacobi's Hand.

Zuerst kündigte dieser seine Resultate in der kurzen Notiz: Sur un noveau principe de la mécanique analytique*) an. Dann gab er die Entwickelungen selbst in den drei zusammenhängenden Abhandlungen: Theoria novi multiplicatoris sytemati aequationum differentialium vulgarium applicandi**).

Wir gehen von den Differentialgleichungen in der Form IV. p. 12 aus. Hat man hierfür die 18 Integrale:

$$f_\varkappa \left(x, x_1, x_2, \dots x_{18} \right) = 0; \; \varkappa = 1, 2, \dots 18,$$

so bestehen die 18 Identitäten;

$$\sum_{i=0}^{18} X_i \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i} = 0; \; \varkappa = 1, 2 \dots 18: x_0 = x; \; H_0 = H.$$

Man kann die $f_\varkappa$ auch als Integrale der einen Gleichung auffassen:

$$\text{IVa)} \quad \sum_{i=0}^{18} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Kennt man die Integrale dieser Gleichung, so hat man auch die von IV) und umgekehrt.

Sind nun $A, A_1, A_2, \dots A_{18}$ die zu den $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ gehörigen Unterdeterminanten der Determinante:

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_{18}}{\partial x_{18}} \text{***)},$$

*) Compt. rend. t. XV. 202—205; 1842.

**) Journ. für Math. Bd. 27. p. 199—268; 29 p. 213—279 u. 333—376; vergl. auch den Auszug im Giornale arcadico T. 99; p. 129—146; 1844. —

***) In der Kronecker'schen statt dieser Jacobi'schen Schreibart:

$$R = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_\varkappa} \right|_{\varkappa i, \; \varkappa = 0,1 \dots n}; \; f_0 = f.$$

so wird, ausgehend von dem Fall nur zweier Variablen M als „Multiplicator“ von IV a) definiert, falls ist:

$$M X = A;\ M X_i = A_i;\ i = 1, 2 \ldots 18;$$

wo dann gilt:

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{18} \frac{\partial (MX_i)}{\partial x_i} = 0.$$

Letztere Gleichung reicht zur Definition von M aus. Es folgt:

$$M = e^{-\int \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial X_{18}}{\partial x_{18}} \right\} \frac{dx}{X}}.$$

Bei uns wird die unter dem Integralzeichen stehende Summe Null, und man kann setzen M = 1. Das Gleiche gilt, wenn man von einem kanonischen System (III, p. 12), ausgeht *).

Hat man nun 17 Integrale von IV, p. 12, so kann man nach Elimination von $x_2 \ldots x_{18}$ die übrigbleibende Gleichung durch M **) integrabel machen. Die letzte Integralgleichung wird:

$$\int \frac{X_1\, dx - X\, dx_1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial w_{16}}{\partial x_{18}}} = \text{const}; \text{***)}$$

hierbei sind $w_i = \alpha_i$, $w = \alpha$ die 17 Integrale; in den X und X_1 sind nur noch x und x_1; die Integration lässt sich zum mindesten durch Quadraturen ausführen; denn „quantitas sub integrationis signo posita evadit differentiale completum“.

An Jacobi's Erörterungen schlossen sich allgemeine Untersuchungen über das Princip nach den verschiedensten Gesichtspunkten hin an. Es ist im besonderen auch die Untersuchung für Specialfälle des Dreikörperproblems vollständig durchgeführt worden †).

*) vgl. Jacobi ges. Werk. p. 451 ff.

**) M kann man hier immer = 1 setzen.

***) Ges. Werke Bd. IV p. 376.

†) vgl. Journ. de Math. I. s. T. 19. p. 88. 1854. Painvin Recherches du dernier multiplicateur pour .....

In ganz anderer Weise giebt Dillner*) das letzte Integral, wenn man die vorhergehenden als bekannt voraussetzt. Er stützt sich in seiner Abhandlung auf Quaternionenrechnung. Seine beiden Integralgleichungen hängen von einem im allgemeinen eine Quadratur erfordernden Integrale ab:

$$\int \frac{d(q^2)}{(Tq)^3},$$

„q" étant un quaternion".

$$kq = k\,(z + iy + jx) = ix + jy + kz.$$

Tq der Tensor**) von q.

Nach Dillner's Ansicht stellen seine Gleichungen zwei unabhängige neue Integralgleichungen dar. Bruns***) weist indes in seiner Kritik der Dillner'schen Arbeit dies dadurch als irrig nach, dass er zeigt, dem Integrale $\int \frac{d(q^2)}{(Tq)^3}$ gehe im allgemeinen ein bestimmter Sinn ganz ab. Es hinge vom Integrationswege ab. Dieser bliebe aber unbekannt, so lange nicht sämtliche Integrale des Problemes mit Ausnahme des letzten gefunden seien. Danach geben Dillner's auf die so umständliche Quaternionenrechnung sich stützende Integrale gleichfalls bei Zulassung von Quadraturen nicht mehr als das durch das Princip des letzten Multiplicators Geleistete: die Auffindung der letzten Integralgleichung aus den vorhergehenden. Ein Eingehen auf die Dillner'sche Arbeit im einzelnen, eine Untersuchung über das Verhältnis der beiden Dillner'schen Integrale zu einander und zum Princip des letzten Multiplicators unterblieb deshalb hier†).

Wir kommen nun auf Sätze über die Herleitung neuer Integrale aus schon bekannten, respective als be-

---

*) Mém. sur la probl. des N=corps. Nova acta Regiae societ. sc. Upsaliens. 1877. Upsala 4⁰ Teil. II.

**) vgl. Tait. Quaternions. 2 ed. p. 26 §. 48. —

***) Fortschritte der Math. 1877. p. 788. -

†) vgl. auch Lie's Bemerkung Math. Annal. VIII. p. 218, wie oben. —

kannt vorausgesetzten, falls die Beschaffenheit der letzteren ganz bestimmten Bedingungen unterworfen ist.

Ebenso wie bei den bisherigen nach dem Jacobi-Poisson'schen Theorem angeführten Sätzen nach Lie's Untersuchungen*) ein Ersetzen der Resultate durch das Jacobi-Poisson'sche Theorem möglich sein musste, so ist dies auch hier der Fall **).

Es sind aber hier die Integrale, aus denen die neuen Resultate hergeleitet werden, besonderen Bedingungen unterworfen, deshalb sind die neuen Integrale weniger wertvoll.

Eine derartige Integralgleichung wird von Jacobi zugleich mit dem Princip des letzten Multiplicators angegeben.

Über den Ursprung der Entwicklungen sagt Jacobi***): „Ultimam integrationem, qua t per Coordinates exprimatur, Quadraturis absolvi, res erat nota et sponte patens". Der wichtigste hier benutzte Gedanke, t zu eliminieren, findet sich schon bei Euler †).

Jacobi teilt das System IV. p. 12 in die zwei ein:

$$dx : dx_1 = X : X_1 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dt} = X_1 = x_{10} ,$$

und:

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{18} = X_1 : X_2 : \ldots : X_{18} .$$

Kennt man 17 Integrale des letzten Systemes von 17 Differentialgleichungen erster Ordnung, welche t gar nicht enthalten, oder auch 17 Integrale von IV, p. 12, welche t nicht enthalten, so kann man von den 18 Variablen x_i

---

*) Math. Annal. VIII, p. 215 ff. —

**) Die betreffenden Operationen sind von der Form des Differentialgleichungssystemes und damit von der von F unabhängig. —

***) Theoria novi multiplicatoris §. 22 p. 445. Ges. W. Bd. IV. —

†) vgl. bes. Acad. Abh. Berlin 1763. hist. 194. —

alle durch eine ausdrücken z. B. $x_2 \ldots x_{18}$ durch x_1. Dann ist aber die aus:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_{10}$$

resultierende Gleichung:

$$dt = \frac{dx_1}{x_{10}}$$

durch Quadraturen in eine endliche Gleichung zu verwandeln. Man erhält so aus 17, t nicht enthaltenden Integralgleichungen die Gleichung:

$$t = \int \frac{dx_1}{x_{10}} + C .$$

Damit ist die Aufgabe dann vollständig gelöst.

Hinsichtlich der Forderung, dass die als bekannt vorausgesetzten 17 Integrale unseres Problemes t nicht enthalten dürfen, ist zu bemerken, dass das Auftreten von dt nichts schadet, da dieses leicht zu eliminieren ist. In den bisher gefundenen Integralen ist t nur in den Schwerpunktsgleichungen aufgetreten. Dennoch ist es eine gewaltige Einschränkung, dass t in den als bekannt vorausgesetzten Integralen nicht enthalten sein darf. Wesentlich für den Wert unseres Resultates ist, dass sich wegen der oben angegebenen Teilung des ursprünglichen Differentialgleichungssystemes IV) das Princip des letzten Multiplicators und das zuletzt angegebene Integral neben einander benutzen lassen *).

Bei Jacobi findet sich dann noch Weiteres übes die Herleitung von neuen Integralen aus bestimmten Arten anderer, als bekannt vorausgesetzter in der nachgelassenen Abhandlung: Nova Methodus § 62. Jacobi zeigt hier,

---

*) vgl. Abschnitt IV). —

wie die zweite Hälfte der Integralgleichungen eines jeden mechanischen Problems zu bestimmen ist, falls man eine bestimmte Reihe von Integralen kennt, durch welche die erste Hälfte der Integrationen als ausgeführt anzusehen ist.

Jacobi geht aus von den System III) p. 12, aus dem er sich wieder t eliminiert denkt:

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_9 : dp_1 : \ldots : dp_9 =$$

$$= \frac{\delta f}{\delta p_1} : \frac{\delta f}{\delta p_2} : \ldots\ldots : \frac{\delta t}{\delta p_9} : - \frac{\delta f}{\delta q_1} : \ldots\ldots : - \frac{\delta f}{dq_9} .$$

Dies System erfordert siebenzehn Integrationen: man kenne nun 9 Integrale:

$$f = a, \quad H_i = a_i ; \quad i = 1, 2 \ldots . 8;$$

so dass erstens:

$$\left(H_1, f\right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\delta H_1}{\delta q_i} \cdot \frac{\delta f}{\delta p_i} - \frac{\delta H_1}{\delta p_i} \cdot \frac{\delta f}{\delta q_i} \right) = 0$$

zweitens:

$$\left(H_2, f\right) = 0 ; \left(H_2, H_1\right) = 0,$$

(die Klammern Ausdrücke derselben Art wie oben), drittens:

$$\left(H_3, f\right) = 0 ; \left(H_3, H_1\right) = \left(H_3, H_2\right) = 0$$

u. s. w. bis:

$$\left(H_8, f\right) = \left(H_8, H_1\right) = \left(H_8, H_2\right) = \ldots = \left(H_8, H_7\right) = 0.$$

Aus diesen neun Integralen bestimmt man die p_i durch die q_i; „habentur m — 1 *) reliqua integralia per formulas:“

$$\int \sum_x \frac{\delta p_i}{\delta p_i} dq_x + b_i = 0,$$

*) Hier 8. —

„in quibus expressiones sub signo sunt differentialia completa. quorum igitur integratio nonnisi quadraturas poscit. Quantitates $a_{)}\ a_{1)} \ldots a_{m-1}$, b, $b_1 \ldots b_{m-1}$ sunt constantes arbitrariae“.

Würde man demnach neun Integrale der gewünschten Art kennen, so hätte man acht weitere Integrale durch unsere letzte Formel, das letzte durch die Formal für t p. 31. Dabei müssen indes die betreffenden Gleichungen $H_i = a_i$ nicht nur Integrale des ursprünglichen Systems sein, was gleichkommt mit der Erfüllung der jedesmaligen ersten partiellen Differentialgleichung:

$$\left(H_i, f\right) = 0,$$

sondern sie müssen i partiellen Differentialgleichungen gleichzeitig genügen. Danach dürfte es schwieriger erscheinen die neun Integrale $f = a$, $H_i = a_i$ zu finden, als 18 beliebige Integrale.

Ausserdem giebt es, wenn man partielle Differentialgleichungen in den Kreis der Betrachtungen zieht, eine Umgestaltung der Differentialgleichungen in eine weit einfachere Form, auf die wir im Abschnitt V) kommen.

Jacobi wendet noch im §. 65 die Entwicklungen an auf ein System neunter Ordnung, welches er aus seinem ursprünglichen zwölfter Ordnung*) durch Elimination von t und einer weiteren Variablen mit Hülfe der Flächensätze herleitet. H_1 und H_2 vermag er anzugeben, die weiteren drei H_i fehlen. Im vierten Abschnitt werden wir hierauf zurückkommen.

Weitere Erfolge haben Jacobi's Untersuchungen bisher nicht gehabt. Trotzdem wurden auch diese Ent-

*) Hier braucht er ausser $f = a$ noch $H_i = a_i$; $i = 1, 2, 3, 4, 5.$ —

wicklungen Jacobi's der Vollständigkeit wegen kurz angegeben. Grundlage und Beweis finden Jacobi's Untersuchungen in seinen Entwicklungen über das Jacobi-Poisson'sche Theorem. Indes mögen hier die Resultate genügen.

IV.

Wir kommen nun in den beiden Abschnitten IV) und V) auf Transformationen unseres ursprünglichen Differentialgleichungssystemes I) p. 11, welche mehr als die dort im Anschluss angeführten formalen Umgestaltungen unserer Aufgabe bedeuten, indem sie Vereinfachungen des Problemes enthalten oder doch enthalten können. Im vierten Abschnitt erörtern wir, wie das Differentialgleichungssystem durch ein anderes System gewöhnlicher Differentialgleichungen ersetzt werden kann, welches weniger Integrationen erfordert, im fünften Abschnitt kommen wir auf die Ersetzung unseres Systemes durch zwei resp, eine partielle Differentialgleichung.

Die im vierten Abschnitt zu besprechenden Resultate enthalten dabei vielfach die Consequenzen des früher Behandelten, und so steht dieser Abschnitt mit den früheren im engsten Zusammenhang. Was im fünften Abschnitt zu erörtern ist, hat eine derartige enge Beziehung zu dem Vorhergehenden durchaus nicht.

Bei der Behandlung von Differentialgleichungen spielen stets Transformationen und Substitutionen eine grosse Rolle, und so wäre es unverständlich, wenn man nicht auch das System der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems in ein einfacheres zu transformieren versucht hätte *).

---

*) Nicht eingegangen wird hier auf rein formale Umgestaltungen, wie die p. 12 erwähnten, wie ferner z. B. die Einführung von Polarcoordinaten und ähnliches. —

Man kann die hier zu erörternden Reductionen mit Hesse*) einteilen in solche: a) ohne Benutzung der gefundenen Integralgleichungen, b) mit Benutzung derselben. Dieser Einteilung soll indes hier nicht gefolgt werden. Wir schreiten historisch fort.

Schon Clairaut zieht folgende Consequenz aus den vier Integralen, welche er für seine sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei Beschränkung auf zwei Dimensionen gefunden hatte. Er setzt die vier Integrale an die Stelle vier seiner ursprünglichen Gleichungen und reduciert so sein System von sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welches zwölf Integrationen erfordert, auf ein System von zwei endlichen Gleichungen, zwei Differentialgleichungen erster, zwei zweiter Ordnung, bei dem noch sechs Integrationen zu leisten sind. Verallgemeinert man Clairaut's Betrachtungen für den Raum, so kann man hier das System I) p. 11 von neun Differentialgleichungen zweiter Ordnung ersetzen durch: drei endliche Gleichungen (durch das Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts), vier Differentialgleichungen erster Ordnung (durch die beiden anderen, Integrale liefernden Principien der Mechanik), zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung (aus dem ursprünglichen System I). Man hat anstelle von 18 ausstehenden Integrationen 8.

Nach Besprechung dieser einfachen Verwendung der allgemeinen Integrale kommen wir noch einmal auf die p. 8 und 9 angeführten Einengungen unserer Aufgabe. Diese sind ohne weiteres als Variablentransformationen zu deuten.

Eine erste Einengung des Problemes bestand in der Einführung eines der drei Massenpunkte als Coordinatenanfang. Das neue Coordinatensystem bewegt sich dabei so, dass gegen das alte die Coordinatenachsen immer

*) Journ. für Math. 74. p. 97. 1872. —

parallel verschoben werden. Wir haben die Transformationsformeln:

$$x_{2\varkappa} - x_{1\varkappa} = \xi_{1\varkappa} \quad ; \quad x_{3\varkappa} - x_{1\varkappa} = \xi_{2\varkappa} \quad ; \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

Man hat nur sechs Variable und sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für die zwölf Integrationen zu leisten sind. Einen Vorteil bedeutet diese Beschränkung nicht, da die sechs Integrationen, die hier weniger zu leisten sind, bei dem vollständigen Problem durch das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes geleistet werden, welches Princip man bei unserer Einschränkung des Problemes nicht anwenden kann. Andererseits kommt man grade mit Hülfe dieses Principes von den $\xi_{i\varkappa}$ zu den $x_{i\varkappa}$ zurück.

Zweitens wurde dann bei den drei Körpern nur die relative Lage gegeneinander untersucht, unter Fortfall der Betrachtung der Lage des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks gegen bestimmte Achsenrichtungen. Bei dieser von Lagrange in seinem Essai zuerst vorgenommenen Reduction werden eingeführt:

$$r_i = \sqrt{\sum_\varkappa \xi_{i\varkappa}^2} \; ; \; i = 1, 2, 3 \; ; \; \xi_{3\varkappa} = \xi_{2\varkappa} - \xi_{1\varkappa} \; ; \; \varkappa = 1, 2, 3.$$

In den r_i (den Seiten des Dreiecks) entstehen die Systeme K) oder M) mit je drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\text{K)} \quad \frac{d^2(r_1)^2}{2dt^2} - \frac{\Sigma m_i}{r_1} - m_3 \left(p_2 q_2 - p_3 q_3 + Q_1\right) = 0, \text{ u. s. w.}$$

$$\text{M)} \quad \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{\Sigma m_i}{r_1^2} - m_3 \left[\frac{p_2 q_2 - p_3 q_3}{r_1} + \frac{P_1}{r_1^3}\right] = 0, \text{ u. s. w.}$$

wenn man sich der Indices statt der Striche bedient; die p_i, ϱ vgl. p. 19; für die q_i, Q_i und P_i gilt:

$$q_1 = \frac{1}{r_2^{\,3}} - \frac{1}{r_3^{\,3}} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{I)}\quad dQ_1 = q_2\, dp_2 - q_3\, dp_3 - q_1\, d\varrho \quad \text{u. s. w.}$$

$$dP_1 = q_1 \left(p_3\, dp_2 - p_2\, dp_3 - r_1^{\,2}\, d\varrho\right) \quad \text{u. s. w.}$$

Zu K) oder M) hinzuzunehmen sind noch je drei Differentialgleichungen erster Ordnung (bei K) die Gleichungen J)). Diese erfordern wegen des vorkommenden $d\varrho$ vier Integrationen (die Bestimmungsgleichung für ϱ ist in den r von der zweiten Ordnung), so dass, um die r zu erhalten 10 Integrationen auszuführen sind.

Somit bedeutet die Lagrange'sche Beschränkung für das fundamentale Differentialgleichungssystem eine weitere Vereinfachung. Will man von den r zu den ξ zurück, so werden die hierbei wiederum zu leistenden zwei Integrationen durch die Flächensätze gegeben, freilich treten dabei Quadraturen auf. (vgl. Lagrange, Essai Abschnitt VIII ff).

Das an sich einfachere Differentialgleichungssystem für das zweite engere Problem transformieren wir nun mit Hülfe der im zweiten Abschnitt besprochenen Integrale in ein noch weniger Integrationen erforderndes. Am Ende seines §. V führt Lagrange statt einer der drei Gleichungen K), die er vornehmlich betrachtet, die durch Combination aus ihnen hergeleitete Gleichung L) ein:

$$\text{L)}\quad \frac{d^2(r_1)^2}{2m_3\, dt^2} + \frac{d^2(r_2)^2}{2m_2\, dt^2} + \frac{d^2(r_3)^2}{2m_1\, dt^2} - \Sigma_i m_i \left(\frac{1}{m_3 r_1} + \frac{1}{m_2 r_2} + \frac{1}{m_1 r_3}\right) = \text{const.}$$

Diese Gleichung enthält die Q_i und ϱ nicht. Nimmt man als fundamentales System zwei Gleichungen K) und diese Gleichung L), dazu I) und die Gleichung für ϱ, so ist dies System nur von der neunten Ordnung. Serret nennt L) „une transformée (sc. équation) de l'intégrale des forces vives", während Lagrange nur bemerkt, dass eben

wegen L) das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft zu einer Identität führt.

Für weitere Reductionen zieht Lagrange dann die Flächensätze in betracht. Aus ihrer Gesamtheit lässt sich ein Integral erster Ordnung herleiten*). Es ist bei Lagrange, das Integral:

$$\text{P)}\quad \frac{\Pi_1}{m_3^2} + \frac{\Pi_2}{m_2^2} + \frac{\Pi_3}{m_1^2} + \frac{2\Psi_1}{m_1 m_2} + \frac{2\Psi_2}{m_1 m_3} + \frac{2\Psi_3}{m_2 m_3} = a^3 + b^2 + c^2$$

$$\left.\begin{aligned}
\Pi_i &= r_i^2\, u_i^2 - \left[\frac{r_i\, dr_i}{dt}\right]^2 \\
\Psi_i &= p_i\, v_i - \left[\frac{dp_i}{2dt}\right]^2 + \left[\frac{d\varrho}{2dt}\right]^2 \\
\text{I)}\ u_i &= \frac{2\Sigma_\varkappa m_\varkappa}{r_i} + \mu_i\,;\ Q_i\,;\ \mu_1 = m_3\,;\ \mu_2 = m_2\,;\ \mu_3 = m_1 \\
v_i^2 &= \frac{1}{2}\left(\Sigma_\varkappa u_\varkappa^2 - 2u_i^2\right)
\end{aligned}\right\}\ i = 1, 2, 3.$$

Da ferner das Integral N) (cf. p. 19) besteht, lässt sich das Differentialgleichungssystem für das Problem der drei Körper auf die siebente Ordnung zurückführen. Es wird in N) und P) für v_i eingeführt u_i und dann für dieses sein Wert aus I); aus den beiden resultierenden Gleichungen und der Gleichung: $\Sigma_i Q_i = f$, aus der sich L) ableiten lässt werden die Q_i bestimmt. Dann enthält das System K) nur noch $\frac{d\varrho}{dt}$ ausser den r_i und ihren ersten und zweiten Ableitungen. Nun berechnet man $\frac{d\varrho}{dt}$ aus einer der Gleichungen K) und setzt es in die

---

*) vgl. übrigens die Benutzung der Flächensätze beim Zurückgehen von den r_i zu den $\xi_{i\varkappa}$ p. 37.

beiden anderen ein, ebenso in die Gleichung für ϱ. Letzteres ergiebt eine Gleichung dritter, ersteres zwei zweiter Ordnung. So bleiben für das Lagrange'sche engere Problem und damit nach dem oben Gesagten auch für das vollständige Problem nur noch sieben Integrationen auszuführen.

Die von uns soeben angegebene Reduction führt Lagrange im ersten Kapitel seines Essai aus. Dies erste Kapitel „mérite d'être compté parmi les traveaux les plus importants de l'illustre auteur" *). Auszusetzen ist freilich der Mangel an Symmetrie. „Préoccupé assurément", sagt Serret, „de l'application qu'il voulait faire de sa nouvelle méthode à la Théorie de la Lune**), application qui fait l'objet du Chapitre IV de son Mémoire, Lagrange a négligé d'introduire dans ses formules la symetrie que comportait son analyse, symetrie qu' un très-leger changement dans les notations permet de rétablir".

Anschliessend an Lagrange's Arbeit besprechen wir die Untersuchungen Hesse's, Serret's und Schemmel's. Hesse glaubt in dem schon oben angeführten Aufsatz, vom Zweikörperproblem ausgehend, ohne Lagrange's Integral N) auf ein System siebenter Ordnung kommen zu können. Doch weist Serret nach: „les trois èquations du troixième ordre qui composeut le premier système de M. Hesse ne sont pas distinctes. Le deuxième système du même géomètre ne saurait en conséquence avoir d' existence réelle". Der Versuch Hesse's ist ebenso gescheitert wie seine Hoffnung bei den Untersuchungen auf eines der noch fehlenden allgemeinen Integrale des Dreikörperproblems zu kommen ***).

Schemmel geht wie Hesse vom Zweikörper-

*) Réflexions sur la mém. de Lagrange . . . par Serret. Compt. rend. 76. p. 1557—65; 1873. —

**) Lagrange's Arbeit wurde zur Bewerbung auf eine Preisfrage der Pariser Akademie hin über die beste Mondtheorie eingeschickt und erhielt mit einer Arbeit Euler's zusammen diesen Preis. —

***) vgl. übrigens Abschnitt VI). —

problem aus. Er schlägt als Weg zur Auffindung neuer Integrale des Dreikörperproblemes vor, man solle die Integrale des Zweikörperproblems „um dieselben Teile, welche zugleich mit der im Integral fehlenden dritten Masse fortgefallen sind“, wieder ergänzen. Doch fordert Schemmel Vorarbeiten. In dieser Beziehung giebt er selbst einiges an über die „characteristische Lage und Bewegung wichtiger Punkte, Graden und Ebenen“. Auch diese Resultate erhält er vom Zweikörperproblem aus, teils aus der Form der Differentialgleichungen selbst, teils aus der geometrischen und kinematischen Bedeutung der Integrale und ihrer Teile.

Serret's schon oben angeführte Bemerkungen stellen die Symmetrie in Lagrange's Entwicklungen her und weisen den Irrtum in Hesse's Erörterungen nach.

Einen ganz anderen, durchweg neuschöpferischen Character tragen die Beiträge Jacobi's für die Transformation der Gleichungen unseres Problemes. Auch gelingt es ihm, zu neuen Resultaten zu kommen. Über diese ist man bisher noch nicht hinausgekommen und kann man in gewisser Weise auch nicht hinauskommen (vgl. Abschnitt VI). Zunächst ist hier hervorzuheben die schon oben erwähnte Elimination der Zeit aus unserem Differentialgleichungssystem, während gezeigt wird, dass t nachträglich durch eine Quadratur zu bestimmen ist. Dies lässt sich auch so auffassen. Statt des vollständigen Problemes wird das engere betrachtet, welches t nicht enthält. Die Lösung dieses engeren Problemes würde zu einer Coordinate die übrigen 8 bestimmen, d. h. die Curven der drei Punkte völlig festlegen. Zu beachten ist indes: bei dieser, als so naheliegend erscheinenden, Einengung der Aufgabe verliert diese völlig ihre Symmetrie.

Die weiteste Reduction unseres Problemes erreichte Jacobi zuerst (1838) im §. 56 der Abhandlung „Nova methodus“ *).

*) Auf Jacobi's Abhdl. Sur l'élim. des noeuds . . . kommen wir weiter unten. —

Jacobi weist hier nach, dass das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft und die Flächensätze bei Zuhülfenahme von Quadraturen je zwei Integrationen ausführen. Für das erstere Princip wird dabei die eben entwickelte Elimination von t benutzt, für das zweite werden neue Variablen so eingeführt, dass wiederum eine von ihnen ganz aus den Differentialgleichungen herausfällt. Für unser Problem specialisiert gestalten sich die Entwicklungen (sie gelten immer, wenn U nicht t enthält) folgendermassen: Wir nehmen einen der drei Punkte als Coordinatenanfang, um es nicht erst mit den Schwerpunktssätzen zu thun zu haben. Die Differentialgleichungen seien (vgl. IV, p. 12.):

$$\text{A)}\ dt : dx_1 : dy_1 : dz_1 : dx_2 : dy_2 : dz_2 : dx'_1 : - - dz'_2$$

$$= 1 : x'_1 : y'_1 : \dots : z'_2 : \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\delta U}{\delta x_1} : \dots \frac{1}{m_2} \frac{\delta U}{\delta z_2}\text{*)} ;$$

wo U die Kräftefunction ist, die gestrichenen Buchstaben die Ableitungen bedeuten.

A) erfordert 12 Integrationen. Man eliminiere t:

$$\text{B)}\ dx_1 : dy_1 : \dots dz_2' = x_1' : y_1' : \dots : z_2' : \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\delta U}{\delta x_1} : \dots : \frac{1}{m_2} \cdot \frac{\delta U}{\delta z_2}.$$

Für dies System hat man das Integral des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft:

$$\text{C)}\ \sum_{i=1,2} \frac{m_i}{2} \left[x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2 \right] = U + h.$$

Da B) elf Integrationen erfordert, bleiben nun nur noch zehn zu leisten. Man setzt weiter:

$$\left.\begin{array}{l} x_i = r_i \cos v_i \\ y_i = r_i \sin v_i \end{array}\right\} v_2 - v_1 = u.$$

Dann lässt sich aus dem Flächensatze für die xy-Ebene v'_i durch r_1, r_2, u, u' ausdrücken. In U und der ganzen

*) $x_i = \xi_{i1}$; $y_i = \xi_{i2}$; $z_i = \xi_{i3}$ p. 7. —

Gleichung C) erhält man nur z_1, z_2, r_1, r_2, u und die ersten Ableitungen dieser Grössen.

Betrachtet man daher das System:

$$\text{D)}\quad dz_1 : dz_2 : du \,;\, dr_1 : dr_2 : dz'_1 : \ldots\ldots : dr'_2$$
$$= z'_1 : \ldots : r'_2 : \frac{1}{m_2}\frac{\delta U}{\delta z_1} : \ldots\ldots : \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta U}{\delta r_2},$$

so erfordert dies neun Integrationen. Eine leistet die Gleichung C) die in unseren Variablen lauten möge f =a. Die Combination der beiden noch nicht benutzten Flächensätze: φ = const, ψ = const (§ 65):

$$H_2 = \varphi^2 + \psi^2 = \text{const}$$

ergiebt ein weiteres Integral. Da nun hier nicht nur: $(H_2, f) = 0$ ist, sondern, wenn $H_1 = a_1$ den schon benutzten Flächensatz bezeichnet, auch gilt:

$$(H_2, H_1) = 0,$$

so leistet H_2 zwei Integrationen (vergl. oben). Es bleiben somit nur sechs Integrationen zu leisten*).

Das Ganze kommt, wenn man will, auf folgendes engere Problem hinaus: Man betrachtet, wenn der Coordinatenanfangspunkt in einem der drei Massenpunkte liegt, die Projection des Dreieckes der drei Punkte auf die xy-Ebene der Gestalt nach, dazu die Abstände der beiden anderen Punkte von der (x y) Ebene**).

Wenden wir auf Jacobi's System D) p. 42 noch das Princip des letzten Multiplicators an (M = 1), so haben wir die weitestgehende Reduction. Es stehen abgesehen von Quadraturen noch fünf Intregrationen aus***).

---

*) Es treten hier gerade wie bei Bruns (vgl. Abschnitt VI,) noch 2 Quadraturen auf, die eine für t, die andere bei Anwendung des p. 32 besprochenen Satzes. — Hinsichtlich weiterer Benutzung der Flächensätze vgl. Weiler und Radau in den Astron. Nachr. 74. 1869 p. 81 resp. 145. —

**) vgl. die kurze Zusammenfassung des Resultatet in der Notiz Jacobi's Astron. Nachr. 1843. XX. p. 99. —

***) vgl. auch Scheibner. Crelle 68; vgl. unten p. 43/44. —

Da weitergehende Resultate für die Transformation des Differentialgleichungssystems unseres Problemes in ein anderes, weniger Integrationen erforderndes System gegewöhnlicher Differentialgleichungen, nicht beigebracht worden sind, begnügen wir uns bei dem Bericht über die weiteren hierher gehörigen Arbeiten mit einer kurzen Besprechung des Hauptsächlichsten.

Bertrand kommt, ohne das letzte Resultat (p. 42) gekannt zu haben*), zu derselben Reduction. Jacobi's, der Abfassung nach in das Jahr 1838 zu setzende Abhandlung, wurde erst nach seinem Tode im Jahre 1860 von Clebsch veröffentlicht, während Bertrand's Arbeit im Jahre 1852 erschien**). Bertrand geht dabei von Untersuchungen über die Gültigkeit des im Abschnitt III) besprochenen Poisson-Jacobi'schen Theorems aus.

In seinem Abschnitt VIII giebt Bertrand kurz seine Resultate für das Dreikörperproblem an, das er mit unter den Beispielen zu seinen allgemeinen Entwicklungen erörtert. Er verspricht, die Ableitung dieser Resultate in einer späteren Abhandlung zu geben. Eine solche hat Verfasser nicht auffinden können.

An Bertrand knüpft Bour***) an. Die Resultate des ersteren reproduciert er kurz; dann bemerkt er; „Seulement les équations de M. Bertrand ont perdu la forme ordinaire I)“ — bei uns III) p. 12 — „des équations des problémes de mécanique; mes recherches ont eu pour objet de les y ramener.“ Dies characterisiert seine Arbeit. Zu der von ihm erstrebten formalen Umgestaltung ist vor allem die Bildung von H erforderlich. Diese gelingt. Zugleich ergiebt sich eine geometrische Deutung des Resultates.

Scheibner†) giebt eine eigentümliche symmetrische

*) vgl. die Einleitung Bertrand's: .... j'effectue une intégration de plus que ne l'avait fait Jacobi. —

**) Journ. de Math. T. 17. p. 393. —

***) Compt. rend. T. 40. p. 1055. —

†) Crelle 68. p. 390. —

Form eines kanonischen Differentialgleichungssystems achter Ordnung für unser Problem. „Da H = h das Integral der lebendigen Kraft darstellt, der letzte Multiplicator bekannt ist“ (M = 1 vgl. oben p. 28) „und die Zeit t nicht explicite vorkommt, so bleiben noch fünf Integrationen zu leisten“, so hebt er das p. 42 angegebene Resultat ausdrücklich hervor.

Betti*) knüpft an Lagrange und Hesse an, kommt aber bis zu dem Jacobi'schen Resultat. Er teilt die Aufgabe unseres Problemes in die beiden Untersuchungen a) Bestimmung der gegenseitigen Lage der drei Punkte durch t, b) Bestimmung der Coordinaten der drei Punkte inbezug auf ein festes Achsensystem. a) erfordert noch 6 Integrale; abgesehen ist von einer Benutzung des Princips des letzten Multiplicators; dazu kommt eine Quadratur. b) erfordert, nachdem a) gelöst ist, nur noch eine Quadratur.

Ganz anderer Art sind die Untersuchungen Jacobi's in seiner Abhandlung**): „Sur l'élimination des noeuds . . .“ und die sich anschliessenden Arbeiten von Brioschi***), Weiler†), Siacci††) Radau†††).

Es handelt sich um die Einführung zweier Massenpunkte, deren Studium das der ursprünglichen drei ersetzen kann, ohne dass für die Differentialgleichungen die Form III) p. 12. verloren geht. Hierzu dient eine lineare Transformation. Es ergiebt sich durch die sogenannte Elimination des Knotens ein System siebenter Ordnung, oder wenn man t eliminiert, eines von der 6. Ordnung.

Radau zeigt im besonderen§), dass man auch ohne die lineare Transformation zur Elimination des Knotens

*) Brioschi. Ann. (2) VIII. p. 301—312. —

**) Compt. rend. 15. p. 236; oeuvr. compl. IV. p. 295. —

***) Compt. rend. 66. p. 710. —

†) Astron. Nachr. 74. p. 81; 75 p. 113. —

††) Compt. Rend. 78. p. 110. —

†††) Compt. Rend. 66. p. 1262; 67. p. 171 u. 316. —

§) Compt. rend. 67. p. 841. —

und der Reduction auf ein System sechster Ordnung kommen könnte, was schon früher Sylvester erkannt hätte, ohne seine diesbezüglichen Arbeiten zu veröffentlichen.

Über Dillner's vermeintliche Aufstellung zweier neuer allgemeiner Integrale haben wir im Abschnitt III) berichtet. Zugleich ist Dillner hauptsächlich für die formale Seite des n = Körperproblemes thätig, gelegentlich daneben auch für die des Problemes der drei Körper.

Dann haben die beiden französischen Mathematiker Allégret*) und Matthieu**) ungefähr gleichzeitig Beiträge zur formalen Ausbildung der für das Dreikörperproblem erhaltenen Resultate veröffentlicht.

Bei beiden handelt es sich um die sogenannte kanonische Form (III) p. 12) des Differentialgleichungssystemes. Dabei suchen sie die Entwicklungen stets auf das n = Körperproblem auszudehnen.

Über Einzelnheiten der Entwicklungen entspinnt sich zwischen beiden ein Streit. Da Allégret auch an das Poisson'sche Theorem gewisse Erörterungen anknüpft, wurde seine Arbeit schon in unserem dritten Abschnitt genannt.

V.

Konnten die in den früheren Abschnitten besprochenen Untersuchungen unbedingt wenigstens als formale Reductionen des Problemes bezeichnet werden, so ist das bei den im Folgenden zu erörternden Zurückführungen der Aufgabe auf die Integration von partiellen Differentialgleichungen nicht möglich. Der Massstab einer grösseren

*) 1875 Jorn. de Math. III. 5. T. 1. p. 277. u. s. w. vgl. das Litteraturverzeichnis. —

**) 1873 Compt. rend. 77. p. 1071—1074 u. s. w. —

formalen Einfachheit kann, da es sich das einemal um totale, das andere um partielle Differentialgleichungen handelt, nicht angewendet werden, da die letzteren notorisch bei weitem schwerer zu behandeln sind *). Werden doch bisher zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen diese auf ein System totaler Differentialgleichungen zurückgeführt. Indes hat Hamilton recht, wenn er in den „Introductory Remarks“ bemerkt **): The difficulty is therefore at least transferred from the integration of many“ (bei uns 18) „of one class to the integration of two of an other and even if it should be thought that no practical facility is gained, yet an intellectual pleasure may result from the reduction of the most complex and, probably, of all researches respecting the forces and motions of body, to the study of one characteristik function, the unfolding of one central relation“. Ferner kann die Zurückführung der Aufgabe auf partielle Differentialgleichungen beim Dreikörperproblem sehr wohl dermaleinst eine Erleichterung der Aufgabe bedeuten. Vorläufig gelten allerdings noch Jacobi's Worte ***): Wenn daher die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung durch die neue Methode Hamilton's auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann, so besteht, wie ich im vorigen gezeigt habe, die ganze Kenntnis, die wir bis jetzt über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wenigstens für den Fall von mehr als drei Variablen besitzen“ — wir haben deren mit t zehn — „darin, die Integration dieser partiellen Differentialgleichungen wieder auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückzuführen“. Das heisst, vorläufig ist die Zurückführung Hamilton's

---

*) Jacobi. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. §. 8. Ges. W. Bd. IV. p. 91. —

**) Philosophical Transactions 1834. p. 248. —

***) l. c p. 99. —

gar keine Erleichterung. Ja falls man die Pfaffsche Methode, die partiellen Differentialgleichungen zu integrieren, anwenden will, „hatte Hamilton das Problem auf ein schwierigeres zurückgeführt*)“.

Hamilton giebt seine Entwicklungen in zwei Essays „On a general Method in Dynamics**)“. Für das Problem der drei Körper besagen sie Folgendes.

Man gehe aus von: (cf. I, p. 9)

$$\text{A)}\quad m_i x''_{i\varkappa} = \frac{\delta U}{\delta x_{i\varkappa}}\;;\; i, \varkappa = 1, 2, 3\;;\; x''_{i\varkappa} = \frac{d^2 x_{i\varkappa}}{dt^2}\,;$$

bildet man „the celebrated law of living force“:

$$T = U + H,$$

hieraus, da H für andere Anfangsdaten variirt:

$$\delta T = \delta U + \delta H;$$

dies ergiebt mit dt multipliciert und dann integriert:

$$\int \sum_{i,\varkappa} m_i\, dx_{i\varkappa}\, \delta x'_{i\varkappa} = \int \sum_{i,\varkappa} m_i\, dx'_{i\varkappa}\, \delta x_{i\varkappa} + \int \delta H\, dt;$$

dann wird eingeführt:

$$V = \int \sum m_i\, x'_{i\varkappa}\, dx_{i\varkappa} = \int_0^t 2\, T dt,$$

und man hat „by the principles of the calculus of variations“:

$$\text{B)}\quad \delta V = \sum m_i\, x'_{i\varkappa}\, \delta x_{i\varkappa} - \sum m_i\, a'_{i\varkappa}\, \delta a_{i\varkappa} + t\delta H.$$

Betrachtet man dann V „as a function of the initial coordinates, and of the quantity H“, so resultiert aus A) leicht:

$$\text{C)}\quad \frac{\delta V}{\delta x_{ik}} = m_i\, x'_{i\varkappa}$$

*) Jacobi's Vorles. über Dynamik. I. Vorl. p. 5. —

**) Philos. Transactions. 1834. II. p. 247; 1835 I. p. 95. —

und:

D) $$\frac{\delta V}{\delta a_{i\varkappa}} = - m_i a'_{i\varkappa},$$

sowie endlich:

E) $$\frac{\delta V}{\delta H} = t.$$

Eliminieren wir H aus C) und E), so erhalten wir die neun „intermediate integrals", Integralgleichungen erster Ordnung. Wird aus D) und E) H eliminiert, so ergeben sich die neun „final integrals", endliche Integralgleichungen. V wird „the characteristic function" genannt, B) „the equation of the characteristic function or the law of the varying action".

Dann wird durch Combination der Gleichung C) und des Integrals der lebendigen Kraft abgeleitet:

F) $$\frac{1}{2} \sum_{i, \varkappa} \frac{1}{m_i} \left(\frac{\delta V}{\delta x_{i\varkappa}} \right)^2 = U + H,$$

und analog:

G) $$\frac{1}{2} \sum_{i, \varkappa} \frac{1}{m_i} \left(\frac{\delta V}{\delta a_{i\varkappa}} \right)^2 = U_0 + H.$$

„These two partial differential equations, initial and final, of the first order and the second degree, must both be identically satisfied by the characteristic function V: they furnish (as we shall find) the principal means of discovering the form of that function, and are of essential importance in its theory".

Statt des Systemes A) „we are at liberty to employ the partial differential equations F) and G) which that function" — sc. V — „must necessarily satisfy".

Weitere Ausführungen und Anwendungen der Betrachtungen — unter anderem auf „Systems of three

Points*) und auf die Störungstheorie**) — bilden den weiteren Inhalt der beiden Abhandlungen Hamilton's.

Vervollkommnet wurden Hamilton's Betrachtungen 1837 durch Jacobi in seiner Abhandlung***): „Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variablen auf die Integration eines Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen".

Jacobi zeigt, dass zur Definition von V, bei ihm $S = \int_0^t \left\{ U + \sum_{i,\varkappa} \frac{1}{2} m_i x'^2_{i\varkappa} \, dt \right\}$, die eine der partiellen Differentialgleichungen Hamilton's genügt; die zweite lasse sich aus der ersten herleiten. Über die Zuziehung der zweiten partiellen Differentialgleichung, der V ja allerdings auch genüge, zur Definierung von V bemerkt Jacobi: „Hamilton scheint mir dadurch seine schöne Entdeckung in ein falsches Licht gesetzt zu haben, ausserdem dass sie dadurch zu gleicher Zeit unnötig compliciert und beschränkt wird. Auch ist hier der Übelstand, dass, da man eine Function nicht durch zwei partielle Differentialgleichungen definieren kann, denen sie gleichzeitig genügen soll, ohne zu beweisen, dass eine solche Function auch wirklich möglich ist, sein Theorem, wie er es ausgesprochen hat, nicht an sich, sondern nur mit dem Beweise, den er liefert, verständlich sein kann".

Nach Jacobi hat das Theorem für unser Problem der drei Körper die einfache Gestalt†): Ist S ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$U = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,\varkappa} \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial S}{\partial x_{i\varkappa}} \right)^2,$$

welches ausser einer mit S bloss durch Addition ver-

---

*) l. c. 1834 p. 296. —

**) l. c. 1834 p. 293; 1835 p. 101. —

***) Journ. für Math. Bd. 17. p. 97—162. —

†) vgl. Ges. Werke Bd. IV. p. 71 in § 3 am Ende. —

bundenen willkürlichen Constanten noch neun andere willkürliche Constanten: $\alpha_{11} \ldots \alpha_{33}$ enthalte, so sind die vollständigen endlichen Integrale der neun gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiten Ordnung mit achtzehn willkürlichen Constanten:

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_{ix}} = \beta_{ix}; = 1, 2, 3,$$

wo die Grössen β_{ix} neue willkürliche Constanten sind.

Jacobi äussert sich dann hinsichtlich des Wertes der Hamilton'schen Resultate in der oben angeführten Weise.

Früchte haben Hamilton's Untersuchungen für das Dreikörperproblem bisher nicht getragen, obgleich man zahlreiche Erörterungen an sie geknüpft hat, namentlich auch über das n=Körperproblem.

Nach Allé*) und Weiler ist hier besonders Mayer und Sophus Lie zu nennen. Wir gehen hierauf und auf die bisherigen Resultate für die Integration der partiellen Differentialgleichungen nicht ein, weil sonst ein Missverhältnis zwischen dem Umfang unseres Abschnittes und der Bedeutung, die man der Hamilton'schen Methode bisher für das Dreikörperproblem zugestehen kann, eintreten würde. Hinsichtlich der Benutzung von partiellen Differentialgleichungen überhaupt sei noch an verschiedene im Früheren (bes. p. 32) besprochene Erörterungen Jacobi's erinnert, wo partielle Differentialgleichungen auftraten. Indes lag dort der Schwerpunkt keineswegs in der Einführung der partiellen Differentialgleichungen.

Das Resultat unseres Abschnittes ist: Zurückführung des Problemes auf die vollständige Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Diese Zurückführung kann bis jetzt als eine Erleichterung nicht bezeichnet werden.

---

*) vgl. bei diesem und den folgenden das Litteraturverzeichnis. —

VI.

Den in den Abschnitten II) bis V) behandelten positiven Resultaten treten, ergänzend und die Schwierigkeit des Problemes, sowie die Fruchtlosigkeit so mancher Bemühungen begründend, einige negative Resultate zur Seite, durch welche gewisse Arten der Lösung oder weiterer Reductionen ausgeschlossen werden.

Zu diesen Ergebnissen haben Studien über die Natur der Integrale geführt. Derartige Studien waren schon Cauchy's Betrachtungen*) über die Convergenz (vgl. unten), dann einige Untersuchungen von Bertrand**) und Radau***) und Lie†) über die Klassifikation der Integrale des Dreikörperproblemes, von wo aus man sich bemühte zur Bestimmung der Grenzen ihrer Benutzbarkeit fortzuschreiten. Erwähnt mögen hier ferner werden — namentlich wegen des engen Zusammenhanges mit der unten zu besprechenden Abhandlung Poincaré's — Lindstedt's Betrachtungen††) über die Form der Integrale des astronomischen Dreiköperproblemes. Von Lagrange's Essai ausgehend, kommt Lindstedt zu dem Resultat, dass sich beim astronomischen Dreikörperproblem die drei Entfernungen der drei Körper als trigonometrische Reihen von vier, der Zeit proportionalen Argumenten darstellen lassen. Tisserand†††) leitet, direct an Jacobi anknüpfend, dieses Resultat in neuer Weise her und erweitert es für gewisse Coordinaten, die sich auch als periodische Functionen von 4 Argumenten darstellen lassen. Weiler§)

---

*) Compt. rend. 44. p. 805 u. 851. —

**) Journ. de Math. 17. p. 393 (bes. 435). —

***) Math. Annal. II. p. 167. —

†) Gött. Nachr. 1872. p. 473. —

††) Astr. Nachr. 105. p. 97; Journ. de l' Ec. Norm. III. S. t. 1. p. 85. —

†††) Compt. rend. 98 p. 1207. —

§) Ast. Nachr. 116. p. 17. —

will eine Characteristik nicht nur der Radien, sondern der vollständigen Integrale geben. Es tritt ein fünftes, der Zeit proportionales, Argument auf, welches die mittlere Knotenlinie ausdrückt. Die Convergenzfrage bleibt ungelöst. Hierdurch ist der Wert dieser Untersuchungen selbst für das astronomische Dreikörperproblem wesentlich eingeschränkt.

Erst in neuester Zeit haben diese Art von Untersuchungen zu uneingeschränkten, wenn auch negativen Resultaten geführt. Die betreffenden Arbeiten rühren von Bruns*) und Poincaré**) her.

Bruns untersucht, sich auf algebraische Betrachtungen stützend, zunächst die algebraischen Integrale des Dreikörperproblemes***), von denen er Folgendes zeigt: Jedes von t freie Integral ist eine algebraische Verbindung von Integralen der Form:

$$\varphi = \text{Rat. Funct.}\left(x_{i\varkappa}, \frac{dy_{i\varkappa}}{dt}, s\right); \; s = r_1 + r_1 r_2 + r_1 r_2 r_3,$$

wo s einer irreductiblen Gleichung 8. Grades genügt mit rationalen Coefficienten in den $x_{i\varkappa}$. Ein solches rationales Integral φ ist weiter zusammensetzbar aus sogen. „homogenen" Integralen von der Form

$$\frac{G_{1\alpha}\left(x_{i\varkappa}, x'_{i\varkappa}, s\right)}{G_{2\alpha}\left(x_{i\varkappa}, x'_{i\varkappa}, s\right)}; \; x'_{i\varkappa} = \frac{dx_{i\varkappa}}{dt},$$

wo $G_{1\alpha}$ und $G_{2\alpha}$ nur Terme gleicher „Dimension" enthalten. Dabei heisst hier Dimension eines Gliedes die Potenz von k, mit der es sich multipliciert bei Anwendung der Substitution:

---

*) Ber. der math. phys. Klasse der K. Sächs. Ges. d. Wiss. 17 Januar u. 1. August 1887 = Acta Math. 1887/88. p. 25—96. —

**) Acta Math. XIII. p. 5—270. —

***) Für den ersten Teil der Betrachtungen ist Königs Aufsatz Compt. rend. 103. p. 460—463 als Vorläufer anzusehen. —

$$\begin{pmatrix} x_{i\varkappa} & t & s & x'_{i\varkappa} \\ x_{i\varkappa} k^2 & t. k^2 & s k^2 & x'_{i\varkappa} \cdot k^{-1} \end{pmatrix}$$ *).

Jedes homogene Integral lässt sich weiter auf die Form: $\varphi = \text{Const.}\ \varphi_1^{\lambda} \cdot \varphi_2^{\mu} \cdots\cdots$ bringen, wo die φ_i in $x'_{i\varkappa}$ ganz, in $x_{i\varkappa}$ und s rational und selbst wieder „homogen" sind.

Die Aufgabe, alle algebraischen (von t freien) Integrale zu finden, ist damit auf die reduciert, alle homogenen Integrale der Art φ_i zu finden.

Diese Elementarbestandteile aller algebraischen Integrale zerlegt Bruns in:

$$\varphi_\alpha = \sum_\varkappa \varphi_{\alpha\varkappa},$$

wo die $\varphi_{\alpha o}$, $\varphi_{\alpha 1}$ .... Glieder gleichen Grades in den $x'_{i\varkappa}$ vereinigen, $\varphi_{\alpha o}$ die des höchsten Grades.

Für die $\varphi_{\alpha o}$ werden dann noch allgemein zwei Sätze bewiesen:

1) Schreibt man $\varphi_{\alpha o}$ als homogene Form der $x'_{i\varkappa}$, so sind die Coefficienten frei von s und ganze rationale Functionen der $x_{i\varkappa}$ ohne gemeinsamen Teiler.

2) $\varphi_{\alpha o}$ genügt der Bedingung:

$$\sum_{i,\varkappa} x'_{i\varkappa} \cdot \frac{\delta \varphi_{\alpha o}}{\delta x_{i\varkappa}} = 0,$$

es ist eine ganze rationelle Function der Grössen:

$z_{i\varkappa} = x'_{11} x_{i\varkappa} - x_{11} x'_{i\varkappa}$. ($f_2 \ldots f_n$; g_i; h_i bei Bruns).

---

*) Nach der bekannten Bezeichnungsart für Substitutionen sind die unteren Grössen für die über ihnen stehenden zu setzen; das allgemeine 2 N bei Bruns ist bei unserem Problem $= -2$. —

Speciell für unser Problem wird dann eingeführt:

$$A = \Sigma\, m_i \left(x_{i2}\, x'_{i3} - x_{i3}\, x'_{i2}\right)$$

$$B = \Sigma\, m_i \left(x_{i}\, x'_{i1} - x_{i1}\, x'_{i3}\right)$$

$$C = \Sigma\, m_i \left(x_{i1}\, x'_{i2} - x_{i2}\, x'_{i1}\right)$$

$$L = \Sigma\, m_i\, x_{i1}\,; \quad M = \Sigma\, m_i\, x_{i2}\,; \quad N = \Sigma\, m_i\, x_{i3}\,;$$

$$L' = \Sigma\, m_i\, x'_{i1}\,; \quad M' = \Sigma\, m_i\, x'_{i2}\,; \quad N' = \Sigma\, m_i\, x'_{i3}\ ^{*)}$$

$$A' = \begin{vmatrix} M & M' \\ N & N' \end{vmatrix}; \quad B' = \begin{vmatrix} L & L' \\ N & N' \end{vmatrix}; \quad C' = \begin{vmatrix} L & L' \\ M & M' \end{vmatrix}.$$

Dann ist jedes $\varphi_{\alpha o}$ eine ganze Function dieser Grössen (ausser L, M, N) und von T:

$$\varphi_{\alpha o} = K\,(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T).$$

Da nun:

$$A, B, C, A', B', C', L', M', N'$$

und T-U „homogene“ Integrale der untersuchten Art sind, so ist es auch die ganze Funktion dieser Grössen:

$$\bar{\varphi}_\alpha = K\,(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T\text{-}U);$$

und zwar ist sein ganz wie oben gebildetes $\bar{\varphi}_{\alpha o}$ dann $\varphi_{\alpha o}$.

Die Differenz zweier Integrale:

$$\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha - \bar{\varphi}_\alpha$$

ist wieder ein Integral von derselben Art, nur dass die Ordnung in $x'_{i\varkappa}$ um eins niedriger ist. Von φ'_α aus geht es nun weiter bis zu einem Integral, welches die $x'_{i\varkappa}$ gar nicht enthält, dann muss es eine Constante sein.

Wenn man rückwärts ersetzt, folgt das Resultat von Bruns: „Bei dem Vielkörperproblem**) ist der Kreis

*) vgl. c_i u. $b_i + a_i t$ für die L' und L auf p. 15 u. 16. —

**) Unsere Betrachtungen gelten ebenso für das Vielkörperproblem. —

der algebraisch aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten zusammengesetzten und von t freien Integrale vollständig mit den bekannten Integralen, nämlich den Schwerpunktssätzen, den Flächensätzen und dem Satze von der lebendigen Kraft abgeschlossen".

Bruns liefert dann unter Hinweis auf Lies Untersuchungen Math. Annal. Bd. VIII) den Beweis, dass man im speciellen an der Hand der bekannten Integrale beim Dreikörperproblem nicht mehr zu neuen Resultaten gelangen kann.

In der zweiten Abhandlung zieht Bruns Integrale in Betracht, welche auch t algebraisch enthalten.

$$\varphi = \text{Rat}\left(x_{i\varkappa}, x'_{i\varkappa}, s, t\right) = \frac{\Pi_i \left(t - t_i\right)}{\Pi_\varkappa \left(t - t_\varkappa\right)}$$

Da in den Differentialgleichungen unseres Problemes t nicht explicite enthalten ist, erkennt man durch logarithmische Differentiation nach t, dass alle $t - t_i$ und $t - t_\varkappa$ Integrale sein müssen. Diese unterscheiden sich aber alle nur um von t freie algebraische Integrale $t - t_\mu$. „Hiernach ist zur Aufstellung aller Integrale der betrachteten Art nur erforderlich zu kennen 1) alle algebraischen und von t freien Integrale, 2) ein einziges Integral von der Form $t - t_1$". Die Schwerpunktsintegrale:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i x_{i\varkappa} = \sum_{i=1}^{3} m_i x'_{i\varkappa} t + b_\varkappa$$

enthalten t. „Beim Vielkörperproblem ist deshalb das Gebiet aller algebraischen Integrale durch die bekannten zehn völlig erschöpft".

Bruns stellt sich dann die Frage: Wie weit ist es möglich, durch algebraische Transformation der Lösung des Dreikörperproblems nahe zu kommen? oder, was im wesentlichen gleichbedeutend ist: Existieren Integrale, welche durch Quadraturen über algebraische Ausdrücke gebildet sind?

Hierzu reduciert Bruns die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems mit Hilfe der bekannten Integrale bis auf die siebente Ordnung und giebt hierfür noch ein Integral (durch Absonderung von t). Von diesem System siebenter Ordnung zeigt er, dass die Annahme eines neuen Integrales, welches Abel'sche Quadraturen enthält auf einen Widerspruch führt.

Da durch algebraische Transformationen ein Abel'sches Integral wieder in ein solches übergeht, so gilt dies negative Resultat für alle Formen der Bewegungsgleichungen, die durch rein algebraische Umformungen aus den ursprünglichen entstehen.

So hat Bruns für die allgemeine Lösung des mathemathischen Dreikörperproblems ausgeschlossen: 1) weitere algebraische Integrale, 2) auch weitere Integrale mit Quadraturen bei Abel'schen Integralen.

Poincaré's Abhandlung *) beschäftigt sich fast ausschliesslich mit dem astronomischen Dreikörperproblem, wenn auch in seiner grössten Allgemeinheit. Doch gelten die negativen Resultate allgemein. Danach (§ 22) können können die ausstehenden Integrale des Dreikörperproblemes keine eindeutigen analytischen Functionen sein.

Poincaré knüpft zunächst an Untersuchungen von Cauchy hinsichtlich des sogenannten Calcul des limites über die Integration der Differentialgleichungen an (vgl. p. 51). Cauchy selbst hatte sich bei seinen allgemeinen Convergenzuntersuchungen auch direct mit dem Dreikörperproblem befasst. Er schlägt für das astronomische Dreikörperproblem Variablen vor, welche eine bessere Convergenz ergäben. Für das mathematische Problem sind besondere Resultate nicht hervorzuheben.

Poincaré leitet eine Reihe weiterer allgemeiner Sätze über die Convergenzfrage ab, die zum teil im Verlauf seiner Abhandlung gebraucht werden.

---

*) Acta Math. XIII. —

Von Differentialgleichungen der Form III) p. 12 aus erhält Poincaré dann (Kap. II)), indem er für q_i einsetzt: $\bar{q}_i = q_i + \xi_i$ und für p_i analog $\bar{p}_i = p_i + \eta_i$ (ξ_i und η_i mögen mit einem Parameter μ verschwinden) die „Gleichungen der Variationen“:

$$\text{A)}\begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \sum_\varkappa \dfrac{\delta^2 H}{\delta p_i \, \delta q_\varkappa} \cdot \xi_\varkappa + \sum_\varkappa \dfrac{\delta^2 H}{\delta p_i \, \delta q_\varkappa} \cdot \eta_\varkappa \\[2ex] \dfrac{d\xi_i}{dt} = - \sum \dfrac{\delta^2 H}{\delta q_i \, \delta q_\varkappa} \xi_\varkappa - \sum_\varkappa \dfrac{d^2 H}{\delta p_i \, \delta q_\varkappa} \cdot \eta_\varkappa . \end{cases}$$

Hieraus leitet er in eigentümlicher Weise die bekannten Integrale her. (§. 5)

Dann wird der Begriff der Integralinvariante:

$\int$ Mdx, . . . dx_n = const, für jedes t, über ein festes Gebiet, M Function von den x_i

eingeführt, und nachdem gezeigt ist, wie die Integralinvarianten zu transformieren sind, werden einige Sätze abgeleitet, anknüpfend an die Frage der Stabilität. Die Betrachtungen beschränken sich mehr und mehr auf das astronomische Problem.

Es seien „periodische“ Lösungen solche, wo:

$q_i = \varphi_{1i}(t) \qquad p_i = \varphi_{2i}(t)$ ist, (Kap. III).

und: $\varphi_{1i}(t + T) = \varphi_{1i}(t)$

$\varphi_{2i}(t + T) = \varphi_{2i}(t) + 2k\pi.$

Dann werden partikuläre Lösungen von A) in der Form aufgestellt:

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= e^{\alpha_\varkappa t} . S_{i\varkappa} \\ \eta_i &= e^{\alpha_\varkappa t} . T_{i\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad S_{i\varkappa}, T_{i\varkappa} \text{ „periodische“ Functionen von } t;\ i = 1, 2, . . 9;\ \varkappa = 1, 2 \ldots 18.$$

Die $\alpha_\varkappa$ werden als characteristische Exponenten be-

zeichnet und bestimmt durch die Gleichung in Determinatenform:

$$\left| \frac{\delta \gamma_i}{\delta \beta_\varkappa} - \delta_{i\varkappa} \cdot e^{2\alpha\pi} \right| = 0 \qquad ; \quad \delta_{i\varkappa} = 0, i \lessgtr \varkappa$$

$$i, \varkappa = 1, 2 \ldots 18 \qquad \delta_{i\varkappa} = 1 ; i = \varkappa.$$

Hierbei sei:

$$\left.\begin{aligned} \beta_i &= \left(\overline{q}_i\right)_{t=0} - \left(\varphi_{1i}\right)_{t=0} ; \quad \beta_{i+9} = \left(\overline{p}_i\right)_{t=0} - \left(\varphi_{2i}\right)_{t=0} \\ \gamma_i &= \left(\overline{q}_i\right)_{t=T} - \left(\varphi_{1i}\right)_{t=T} ; \quad \gamma_{i+9} = \left(\overline{p}_i\right)_{t=T} - \left(\varphi_{2i}\right)_{t=T} \end{aligned}\right\} i = 1..9$$

$\overline{q}_i$ und $\overline{p}_i$ vgl. p. 57 unten.

Es werden dann verschiedene Erörterungen über die characteristischen Exponenten angestellt und für dieselben Reihen nach Potenzen von $\sqrt{\mu}$ abgeleitet. Darauf werden „asymptotische“ Lösungen betrachtet, welche freilich zu divergenten Reihen führen, doch so dass bei kleinem μ der Wert;

$$\frac{\Phi - \Phi_p}{\mu^p} \; ;$$

Φ die Lösung; Φ_p bis zur pten Potenz der Entwickelung nach μ;

zu Null strebt.

Im zweiten Teil seiner Abhandlung beschränkt sich Poincaré in Kapitel I) bis III) auf den Fall:

B) $\frac{dq_1}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta p_1} ; \frac{dq_2}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta p_2} ; \frac{\delta p_1}{\delta t} = -\frac{\delta H}{\delta q_1} ; \frac{\delta p_2}{\delta t} = \frac{-\delta H}{dq_2} .$

Es werden nach einigen geometrischen Deutungen der asymptotischen Lösungen sogenannte asymptotische Flächen untersucht bis auf Fehler von der Ordnung μ (erste Annäherung), dann bis auf μ^p (zweite Ann.) und endlich werden die genauen Gleichungen dieser Flächen dis-

cutiert. Es schliessen sich Untersuchungen über „periodische Lösungen zweiter Art", die in gewissen Librationsgebieten existieren, an. Es gelingt die Divergenz der Reihen des Herrn Lindstedt nachzuweisen. (vgl. p. 52).

Vor dem Schluss, der in einem Versuche der Verallgemeinerung der Resultate für das n = Körperproblem besteht, enthält dann §. 22 die Ableitung des für uns wichtigsten Resultates: Es giebt für das System B) kein weiteres analytisches eindeutiges periodisches Integral ausser H = const.

Es sei Φ = const ein solches Integral, dann zeigt Poincaré, dass für alle Punkte aller periodischen Lösungen bestehen muss:

$$\frac{\delta H}{\delta q_1} : \frac{\delta \Phi}{\delta q_1} = \frac{\delta H}{\delta q_2} : \frac{\delta \Phi}{\delta q_2} = \frac{\delta H}{\delta p_1} : \frac{\delta \Phi}{\delta p_1} = \frac{\delta H}{\delta p_2} : \frac{\delta \Phi}{\delta p_2} .$$

Da aber bewiesen werden kann, dass:

$$\underset{1}{f} = \frac{\delta H}{\delta q_1} \cdot \frac{\delta \Phi}{\delta q_2} - \frac{\delta \Phi}{\delta q_1} \cdot \frac{\delta H}{\delta q_2}$$

identisch Null ist; $(f_1)_{\mu=0} = 0$, $\left(\frac{\delta f_1}{\delta \mu}\right)_{\mu=0} = 0$ u. s. w. entsprechend für f_2, f_3, so folgt, dass Φ eine Function von H ist und kein neues Integral; d. h. es kann kein weiteres analytisches eindeutiges periodisches Integral geben. Ja es kann dann selbst kein weiteres Integral geben, welches in einem beliebigen begrenzten Gebiete eines Teiles der Variablen und für gewisse Grenzen der störenden Grösse μ eine eindeutige analytische Function wäre. Dasselbe gilt a fortiori auch für das mathematische Dreikörperproblem.

Die in unserem Abschnitt VI) besprochenen Arbeiten ergeben das negative Resultat: Es hann kein weiteres algebraisches, ebenso kein weiteres analytisches eindeutiges Integral für das Dreikörperproblem geben.

VII.

Beim Überblick über die im Verhältnis zu dem, was zu leisten ist, so wenig befriedigenden Reductionen des mathematischen Dreikörperproblemes muss einem jeden das Missverhältnis auffallen zwischen der aufgewendeten Mühe der ersten Mathematiker und dem, was erreicht worden ist. Hier stellt uns die Geschichte unseres Problemes vor die Alternative: 1) Entweder es bewegen sich die bisherigen Bemühungen nicht auf den richtigen Wegen, 2) oder es giebt keine Lösung des Problemes.

Um von allen anderen gegen die Annahme des Falles 2) sprechenden Gründen ganz abzusehen, so ist er durch die Thatsache, dass Dirichlet in seiner neuen Methode der Behandlung von Problemen der Mechanik*) eine Lösung unseres Problemes hatte, einfach ausgeschlossen. Euler's Worte**) über unser Problem sind widerlegt: „Hoc autem problema in genere spectatum difficilius esse videtur, quam ut spes aliqua esse possit illius solutionem completam aliquando inveniri posse". Clairaut's***): „Intègre maintenant qui pourra!" hat seinen Mann gefunden.

Wir wissen von Dirichlet's Lösung nur durch ein Gespräch Dirichlet's mit Herrn Kronecker. Und wenn es auch ausserordentlich beklagenswert erscheinen muss, dass Dirichlet seine Lösung, ohne sie der Nachwelt zu offenbaren, mit in's Grab genommen hat, so können wir uns doch glücklich preisen, dass wir nicht nur von jener Lösung überhaupt, sondern auch von der Art derselben Kunde erhalten haben. Danach ging Dirichlet's Methode, die mit der Theorie der kleinen Schwingungen in einem gewissen Zusammenhang gestanden hat, nicht

---

*) Abhdl. der Berl. Akad. 1860; Sitzungsber. d. Berl. Akad. 12. April 1888. —

**) Annotatio quarundam cautelarum . . . Petrop. Comm. nov. XIII. 1769. hist. 18. —

***) Réflexions sur le probl. des tr. c. Journ. des Scav. 1759. p. 563. —

darauf hinaus, wie es Jacobi versucht hatte, die Integration der betreffenden Differentialgleichungen auf Quadraturen zurückzuführen. Dies Mittel bezeichnete Dirichlet als zu beschränkt (vgl. Abschnitt VI). „Sein Verfahren“ bestehe „vielmehr in einer stufenweisen Annäherung“, ‚bei welcher jeder neue Schritt zugleich eine vollständige und neue Einsicht in die Art der durch die Natur der Bedingungen der Aufgabe bestimmten Bewegung gewähre *)“.

Nach den Mitteilungen Kronecker's**) geben die an die erste Frage des König Oscar Preises für 1889 angeknüpften Bemerkungen***) ein falsches Bild von dem Inhalt der Mitteilung, welche Dirichlet gemacht hat, insofern aus jenen Bemerkungen hervorzugehen scheint, als ob Dirichlet selbst seine Erledigung der mechanischen Fragen vermittellst Reihen bewerkstelligt hätte. Dies ist so wenig der Fall, dass vielmehr Dirichlet bei seiner Mitteilung Nachdruck darauf gelegt hat, dass er nicht durch Reihen — dieses Wort natürlich im gewöhnlichen Sinne verstanden —, sondern durch ein allmähliches sicheres Annäherungsverfahren — auf das Wort „Verfahren“ legte er Gewicht — zum Ziele gelangt sei. Der ganze Zusammenhang seiner Mitteilung liess Herrn Kronecker schliessen, dass Dirichlet seine Untersuchungen in Verbindung mit Entwicklungen über das Potential zum Abschluss gebracht habe. Auch die Verbindung, in welche die Bemerkung zur erwähnten Preisaufgabe Dirichlet's Erledigung des n = Körperproblemes mit seinem — ebenfalls nicht für die Nachwelt fixierten — Beweis der Stabilität des Weltsystemes bringt, widerspricht dem wahren Sachverhalt ganz, da Dirichlet Herrn Kronnecker an zwei ganz verschiedenen Tagen und, ohne die

*) Abhdl.d. Berl. Ak. 1860 S. 35. ff. —

**) Sitzungsber. d. Berl. Ak. 12. IV. 1888; zum teil rühren vorgebrachten Bemerkungen Kronecker's auch aus persönlichen Äusserungen seines hochverehrten Lehrers gegen den Verfasser. —

***) Acta Math. Bd. VII. —

beiden Untersuchungen in irgend eine Beziehung zu bringen, die Mitteilungen über die beiden Untersuchungen gemacht hat. Dabei haben beide Mitteilungen eine so ganz verschiedene Färbung gehabt, dass es Herrn Kronecker sicher ist, dass Dirichlet's Beweis für die Stabilität des Weltsystemes in seinem Kopfe vollkommen fertig und in so grossartig einfacher und durchsichtiger Weise gefasst war, wie seine Abhandlung über die Stabilität des Gleichgewichtes *), während die Untersuchung, welche auch die allgemeine Lösung des Dreikörperproblemes ergiebt, auf neuen Annäherungsweisen beruhend, für die vollständige Ausarbeitung wohl noch weitläufiger Auseinandersetzungen bedurfte.

Nach diesen Erörterungen über die Dirichlet'sche Lösung, ziehen wir zunächst die Folgerung:

A. Die Hoffnung der Lösbarkeit des mathematischen Dreikörperproblems ist eine wohlberechtigte **).

In Beantwortung des Falles 1) p. 58 kommen wir dann aus dem Angeführten und den negativen Resultaten des Abschnitts VI) zu dem Schlusse:

B. Die Methoden, die man in den über das Dreikörperproblem veröffentlichten Arbeiten benutzt hat, sind durch ganz neue Verfahrungsweisen zu ersetzen ***).

Neben den Möglichkeiten, die sich an die Andeutungen knüpfen, die von Dirichlet's Lösung bekannt geworden sind, ist dabei an die Art der Behandlung unseres Problemes durch Bruns und Poincaré zu denken. Wie bei allen modernen Untersuchungen über Differentialgleichungen ist die Natur der dargestellten Functionen zu untersuchen.

Für jede weitere Bemühung, zu einer Lösung unseres Problemes zu gelangen, scheinen dem Verfasser endlich noch zwei Bemerkungen von Wichtigkeit zu sein.

---

*) Monatsber. Berlin 1846. 22. I. p. 34; Journ. für Math. Bd. 32. p. 85.

**) vgl. die Bemerkungen zur erwähnten Preisaufgabe; Acta Math. Bd. VII.

***) vgl. auch Poincaré. Acta Math. Bd. XIII. p. 6. vorletzten Abschnitt.

Γ. Es ist durchaus zu unterscheiden zwischen dem astronomischen und dem mathematischen Dreikörperproblem, der Behandlung von Specialfällen und der allgemeinen Aufgabe.

Dies ist durchaus nicht immer geschehen, nicht nur hinsichtlich der Bezeichnung, sondern auch der Sache nach.

Δ. Der Begriff der „Störung“ ist beim mathematischen Dreikörperproblem nicht zulässig.

Die Methoden auch des allgemeinsten astronomischen Dreikörperproblemes scheinen naturgemäss angewiesen zu sein, von dem Begriff der Störung auszugehen. Diesen hat man bei dem mathematischen Problem dagegen durchaus zu verbannen. Es ist logisch unmöglich den Begriff der Störung hier festzuhalten wegen der Unmöglichkeit anzugeben, was man hier unter dem Begriff der ungestörten Bahn zu verstehen hat*).

---

*) vgl. auch Euler. Novi Commentarii T. X. Petersburg 1764, wo es nach Specialisierung der Massenverhältnisse in der Weise, wie wir es bei Sonne, Erde, Mond haben, heisst: für gewisse Abstandsverhältnisse sei die Bahn so compliciert: „ut vix intelligi possit, quemadmodum saltem ideam motus medii constitui conveniat“.

Verzeichnis der Arbeiten über das mathematische Dreikörperproblem.

1759. Clairaut. Rèflexions sur la probl. des trois corps. Paris Journ. des Sçav. 1759. p. 563.

1772. Lagrange. Essai d'une nouvelle mèthode pour résoudre le probl. des trois corps. Paris Rec. IX. 1772 No. 9; Oeuvr. VI. 1873. p. 229.

1808/16 Poisson. Mém. sur la variation des constantes arbitraires ... Paris Soc. Philom. Bull. I. p. 422 u. ebenda 1816 p. 140.

1827. Jacobi. Über die Pfaffsche Methode .... Crelle 2. p. 347.

1834/5. Hamilton. On a general Method in Dynamics. Phil. Transactions. London 1834. II. p. 247; 1835, I, p. 95.

1836. Jacobi. Lettre sur .... et sur un car particulier du probl. des trois corps. Compt. rend. 18. Juli. T. III.

1837. Jacobi. Über die Reduction der Integration der part. Dfflgn. erster Ordnung ..... Crelle XVII. p. 97.
Jacobi Note sur l'intégr. des équations diff. de la dynamique. Compt. rend. V. p. 61.

1838. Jacobi. Nova methodus aequat. diff. part. primi ordinis ... integrandi. Crelle. 60. p. 1. (ed. Clebsch).

1840. Jacobi. Sur un théorème de Poisson. Compt. rend. 11, p. 529.

1842. Jacobi. Sur un nouveau principe de la mécanique analytique. Compt. rend. 15. p. 202.
Jacobi. Sur l'élimination des noeuds dans le probl. des trois corps. l. c. p. 236.

Liouville. Extrait d'un mémoire sur un cas particulier du probl. des trois corps. Journ. de Math. I. S. T. 17. p. 113.

1843. Clausen. Über Jacobi's Auflösung des Problems der drei Körper. Astr. Nachr. XX. p. 97.

Jacobi. Bemerkungen zum vorigen Aufsatz l. c. XXI. p. 99.

1844. Jacobi. Theoria multiplicatoris .... Crelle 27. p. 199, 29 p. 213 u. 333.

Jacobi. Sul principie dell' ultimo moltiplicatore e suo uso .... Giornale arcadico. T. 99. p. 129.

1845. Liouville. Sur un cas particulier du problème des trois corps .. Additions à la Connaissance des Temps pour 1845. Paris.

1848. Desboves. Sur la mouvement d'un point matériel... Journ. de Math. I. S. T. 13 p. 369.

Desboves, Démonstration do deux théorèmes de M. Jacobi. application au problème des perturbations planétaires. l. c. p. 397.

1851. Hansen. Auszug eines Schreibens .... Crelle 42. p. 1.

Jacobi. Auszug zweier Schreiben. l. c. p. 12.

1852. Bertrand. Mém. sur l'intégration des équations diff. de la Mécanique. Journ. de Math. I. S. T. 17. p. 393.

Jacobi. Problema trium corporum .... Ges. W. Bd. IV. p. 533. (ed. Wangerin).

Jacobi. Vorles. über Dynamik. (ed. Clebsch).

1854. Painvin. Recherche du dernier multiplicateur .... Journ. de Math. I. S. T. 19. p. 88.

1855. Ed. Bour. Mèm. sus le probl. des trois corps. Compt. rend. t. 40. p. 1055.

1856. Liouville. Mém. sur un cas particulier du probl. des trois corps. Journ. de Math. II. S. T. 1. p. 348.

Cauchy. Sur l'intégration d'un syst. d'équations diff. et spécialement ... Compt. rend. 44. p. 805.

Cauchy. Méthode nouvelle pour la détermination des mouvements des astres. l. c. p. 851.

1860. Hayward. Direct demonstration of Jacobi's canonical formulae .... Quat. Journ. of Sylvester. III. p. 22.

1861. Grosso. Nota sul probl. dei tre corpi. Neapel. Rendiconti dell' Acad. Pontaniana.

1863. Weiler. Integration der part. Dftgln. erster Ordn..... Zeitschr. für Math. u. Phys. Lpz. t. 8. p. 264.

1866. Weiler. Über das Problem der drei Körper .... Lpz. Publ. III.

1868. Radau. Sur un théorème de Méc. Compt rend. 66. p. 1262.

Radau. Sur une transformation ... l. c. 67. p. 316.

Radau. Sur une transformation .... Annal. de l'Èc. Norm. V. p. 311.

Saheibner. Über das Probl. der drei Körper. Crelle 68. p. 390.

Brioschi. Sur une transform. des équ. diff. du pr. des trois corps. Compt. rend. 66. p. 710.

Radau. Remarques sur le pr. des trois corps l. c. 67 p. 171 = Astr. Nachr. 72. p. 101.

Radau. Sur l'élimination directe ... Compt. rend. 67. p. 84 1.

1869. Radau. Weitere Bem. über d. Pr. d. d. K. Ast. Nach. 74. p. 145.

1869/70. Weiler. Sieben Abhdln. über unser Problem. l. c. 74. p. 81; 75. p. 113.

1870. Radau. Über gewisse Eigensch. der Dftgln. der Dynamik. Math. Annal. II. p. 167.

Mayer. Über die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode ... l. c. III. p. 435.

1871. Siacci. Intorno d'alcune transformazioni ... Atti di Turino.VI. p. 440.

1872. Lie. Zur Theorie der part. Dffgl. 1. Ordn. .... Gött. Nach. p. 473.

Lie. Über eine neue Integrationsmeth. l. c. No. 19.

Lie. Neue Integrationsmethode ... Abh. d. Ak. zu Christiania 10 Mai 1872.

Mayer. Über unbeschränkt integrable Syst. von lin. part. Dffgln. ..... Math. Annal. V. p. 4—48.

Mayer. Zur simult. Integr. lin. p. Dffgln. Gött. Nachr. p. 315.

Mayer. Zur Theorie der vollst. Lösungen .... l. c. p. 405.

Mayer. Die Lie'sche Integrationsmethode ... l. c. p. 467.

Hesse. Über das Problem d. d. K. Crelle 74. p. 97 = Münch. Abh. II. Bd. 11. I. p. 53. 1873.

1873. Matthieu. Mém. sur le pr. d. t. c. Compt rend. 77. p. 1071.

Serret. Réflexions sur le mém. de Lagrange .... l. c. 76. p. 1557.

Schering. Hamilton-Jakobi'sche Theorie ..... Gött. Nachricht. p. 744.

1874. Siacci. Sur le pr. des trois corps. Compt. Rend. 78. d. 110.

Matthieu. Mém. sur le pr. d. t. c. l. c. p. 408.

1875. Allégret. Mém. sur le pr. d. t. c. Journ. de Math. III. 5. T. I. p. 277.

Mayer. Über eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode. Math. Annal. VIII. p. 313.

1876. Matthieu. Mém. sur le pr. d. t. c. Journ. de Math. III. 5. T. 2. p. 345.

Allé. Über die Bewegungsgleichungen .... Sitzber. der Wiener Akad. 73. 2. p. 25.

Lie. Allgem. Theorie d. part. Dffgln 1. Ordn. Math. Annal. IX p. 245.

1877. Betti. Sopra il moto di un sistema .... Brioschi Ann. (2) VIII, p. 301.

G. Dillner. Mém. sur le pr. des N.-Corps. Nova acta Regiae soc. sc. Upsaliensis.

Lie. Allgem. Th. d. part. Dffgln. 1 Ordn. 2te Abh. Math. Annal. XI. p. 464.

Weiler. Nachträge .... Zeitschr. für Math. u. Phys. Lpz. t. 22. p. 100.

Allégret. Note sur le p. d. t. h. Journ. de Math. III. 5. T. 3. p. 422.

Mathieu. Sur le p. d. t. c. l. c. p. 216.

Mathieu. Mém. sur les èqu. du mouvement .... l. c. p. 5.

Mathieu. Réponse à M. Allégret .... l. c. T. 4. p. 61.

1880. Mayer. Über die allg. Integration der dyn. Dffgln. — Math. Annal. 17. p. 332.

1881. Radau. Travaux concernant le pr. d. t. c. . . Darboux Bulletin (2) V. p. 270.

1882. Dillner. Om integration af diff. equationerna...... Stockholm. Öfr. No. 8 p. 9.

1883. Dillner. Sur l'intégr. des équ. diff. . . . . . Brioschi Annal. (2) XI. p. 56.

Lindstedt. Über die allgem. Form der Integrale des Dreikörperproblems. Astr. Nachr. 105. p. 97.

1884. Seydler. Über einige neue Formen der Integrale des 2 und 3 Körperpr. Sitzber. der Wien. Ak. p. 851.

Lindstedt. Sur la déterm. des distances . . . . Journ. de l'éc. Norm. III. 5. T. 1. p. 85.

Tisserand. Note sur la theorème de M. Lindstedt.... Compt. rend. 98. p. 1207.

Schemmel. Zum Probl. der drei Körper. Programm der Kgl. Realschule zu Berlin.

1885. Tisserand. Mém. sur le pr. d. t. c. Annal. de l'observatoire de Paris. Mém. t. 18. g. 1.—g. 19.

1887. Weiler. Über die Form der Integrale in dem Problem der drei K. Astr. Nachr. 116, p. 17.

Bruns. Über die Int. des Vielkörperproblemes. Ber. d. math. phys. Kl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. 17. Jan. u. 1. August. = Acta Math. 1887/88. p. 25.

1890. Poincaré. Sur le pr. d. t. c. et les équ. de la Dynamique. Acta Math. XIII. p. 1.

Anm.: Eine im Erscheinen begriffene Besprechung der Poincaréschen Arbeit von Noether (Astron. Vierteljahresschrift) hat Verf. nicht mehr benutzen können.

Vita.

Ernestus Kullrich natus sum Berolini anno MDCCCLXIII. a. d. IV. Non. Nov. patre Guilelmo viro optimo, quem ante hos quattuor annos morte mihi ereptum esse lugeo, matre Anna e gente Schulz. Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum elementis imbutus Berolini in gymnasium Fridericum Guilelmum receptus sum paucisque annis post Gymnasium Ascanium adii. Ubi vere anni MDCCCLXXXIII. testimonium maturitatis adeptus per octo semestria in universitate Berolinensi studiis mathematicis, physicis, philosophicis operam dedi. Tum postquam in exploratione studiorum ita respondi, ut facultate docendi dignum me praestiterim, Berolini magistri munere functus sum ac primum duo per semestria candidatus probandus in gymnasio ea in parte urbis sito, cui nomen est Königstadt, tum per sex menses in gymnasio reali regio, denique abhinc tria semestria in gymnasio Joachimico, ubi et praeceptoris et adiuncti munere etiamnunc fungor.

Docuerunt me in alma litterarum universitate Berolinensi viri doctissimi Dilthey, Ebbinghaus, Eichler, Foerster, Fuchs, Glan, de Helmholtz, Hettner, Kayser, Knoblauch, Kronecker, Netto, Paulsen, Rehmke, Runge, F. E. Schulze, Schwendener, Sell, Tietjen, Weierstrass, Will, Zeller. Quibus viris omnibus optime de me meritis, imprimis vero professoribus illustrissimis Fuchs et Kronecker gratias semper habebo quam maximas. Nec minores gratias ago viro doctissimo Wangerin, academiae Friedericianae Halensis professori illustrissimo, qui hac dissertatione conficienda et re et consiliis benignissime me adiuvit.

Thesen.

I.

Zur Zeit ist den negativen für das mathematische Dreikörperproblem bekannten Resultaten höherer Wert beizumessen als den positiven.

II.

Es ist wünschenswert, das Gebiet der Mathematik gegen die angrenzenden Wissenschaften schärfer abzugrenzen.

III.

Bei der Ausbildung der Probekandidaten in den neueingerichteten Seminarien ist die Aneignung gewisser medicinischer Kenntnisse zu erstreben.





